

**Examen General de Conocimientos:
Álgebra Conmutativa.
Semestre 2022-II.
26 de julio de 2022.**

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. Cada uno de los seis ejercicios tiene el mismo valor. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Todos los anillos considerados son conmutativos con unidad.

1. Sea R un anillo noetheriano y $S \subseteq R$ un subconjunto multiplicativo. Demuestra que $S^{-1}R$ es un R -módulo plano.
2. Sea R un anillo noetheriano y M un R -módulo finitamente generado. Demuestra que si M es un R -módulo plano, entonces M es proyectivo.
3. Sean k un campo y $n \geq 2$. Demuestra que $k[t]/t^n$ es un anillo artiniiano.
4. Sea I un ideal de R tal que $I = rad(I)$. Demuestra que I no tiene ideales primos encajados, es decir, todos los ideales primos en $Ass(R/I)$ son mínimos en R/I .
5. Sean R un anillo noetheriano y M un R -módulo finitamente generado. Demuestra que los ideales mínimos en

$$Supp(M) \subseteq Spec(R)$$

son un conjunto finito, donde $Supp(M) = \{\mathfrak{P} \in Spec(R) : M_{\mathfrak{P}} \neq 0\}$.

6. Sean R un anillo noetheriano y M un R -módulo finitamente generado. Sea $Ann(M) = \{x \in R : xM = 0\}$ el anulador de M y $V(Ann(M)) = \{\mathfrak{P} \in Spec(R) : Ann(M) \subseteq \mathfrak{P}\}$ su locus de ceros. Demuestra que

$$Supp(M) = V(Ann(M)).$$