Examen General de Conocimientos: Álgebra Moderna.
Semestre 2022-II.
26 de julio de 2022.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un **máximo de 3.5 horas**. Escoge y resuelve solamente 3 ejercicios de Teoría de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. Si se resuelven más de 3 ejercicios en cada sección, se calificarán los 3 primeros. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Sean G y G' dos grupos con subgrupos normales H y H' respectivamente. Sea $\varphi : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo de grupos tal que $\varphi(H) \subseteq H'$. Demuestra lo siguiente:
   a) φ induce un homomorfismo de grupos $\bar{\varphi} : {}^{G}/_{H} \longrightarrow {}^{G'}/_{H'}$;
   b) Si φ es un isomorfismo y $\varphi(H) = H'$, entonces $\bar{\varphi}$ es un isomorfismo.

2. Sea G un grupo finito de orden p^2 con p primo. Demuestra que, o bien G es cíclico, o G es isomorfo a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

3. Sea G un grupo de orden 72. Demuestra que G no es simple.

4. Sea $A_4 \subset S_4$ el grupo de permutaciones pares. Determine las clases de conjugación de A_4.

5. Demuestra lo siguiente:
   a) Todo p-grupo finito es soluble;
   b) S_4 es un grupo soluble pero si $n \geq 5$, entonces S_n no es un grupo soluble.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Suponga que R es un dominio (a veces llamado dominio entero) y sean $a, b \in R$, diremos que a y b son "primos relativos" si la suma de los ideales $\langle a \rangle + \langle b \rangle = R$. Sea $c \in R$. Supongamos que a y b son primos relativos y que $a \mid bc$ en R, demuestra que $a \mid c$ en R.

2. Sea R un anillo conmutativo con 1. Suponga que u es una unidad y n es un elemento nilpotente (es decir, existe m tal que $n^m = 0$), demuestra que $u + n$ es una unidad.

3. Demuestra lo siguiente:
   a) Sean $F \subseteq E$ campos. Sean $\alpha \in E$ y $f(x) \in F[x]$ polinomio irreducible tales que $f(\alpha) = 0$. Demuestra que si f es de grado impar, entonces $F(\alpha) = F(\alpha^2)$;
   b) Sean $F \subseteq E$ campos. Sean $\alpha, \beta \in E$ tales que α es algebraico sobre F y β es algebraico sobre $F[\alpha]$. Demuestra que β es algebraico sobre F.

4. Sea $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\right)$. Determina $[K : \mathbb{Q}]$, además demuestra que K es una extensión de Galois y determina su grupo de Galois.

5. Si E/F es una extensión de Galois tal que $Gal\,(E/F)$ es abeliano, entonces demuestra que todo campo intermedio B/F es una extensión de Galois.