Universidad Nacional Autónoma de México

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Complejo

Julio del 2022
Semestre 2022-2

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos,
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

---

1. (6 puntos) Prueba que la serie
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$
converge para $\mathrm{Re}(z) > 1$ y representa a su derivada de la misma manera.

2. (6 puntos) Si $f(z)$ es una función holomorfa en el disco unitario $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $f(0) = 0$, prueba que
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$$
converge para $|z| < 1$ y es también una función holomorfa en D.

3. (6 puntos) Sea $f(z)$ una función entera que satisface $|f(z)| \leq Me^{|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Mostrar que $|f(0)| \leq M$ y que
$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq M \left(\frac{e}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

4. (6 puntos) Sea $a \in D = \{z \ : \ |z| < 1\}$. Prueba que $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1$ si y solo si $|z| < 1$.

5. (6 puntos) Calcula las siguientes integrales

   a)
$$\int_{|z-i|=3} e^{\mathrm{sen}(z)} dz$$

   b)
$$\int_{|z-i|=3} \frac{\mathrm{sen}(z)}{z} dz$$

c)

$$\int_{|z-i|=3} \frac{1}{(z+1)z^3} dz$$

6. (6 puntos) Sea D el disco unitario abierto y $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa y que no se anula.

   a) Prueba que existe $F : D \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F^2 = f$.

   b) Prueba que si f es inyectiva entonces F también es inyectiva y que $F(D)$ no contiene puntos antípodas (-a es el antípodo de a).

   c) Use lo anterior y el teorema de la aplicación abierta para probar que el interior de $\mathbb{C} \setminus F(D)$ es no vacío.