POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Funcional

julio del 2022
Semestre 2022-2

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

---

1. (6 puntos) Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$. Por X^* denotamos su dual, es decir el conjunto de funciones lineales continuas de X en $\mathbb{C}$.

   Prueba que un conjunto $B \subseteq X$ es acotado si y sólo si para todo $\varphi \in X^*$

   $$\sup_{x \in B} \{|\varphi(x)|\} < +\infty$$

2. (6 puntos) Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una función lineal.

   Supón que para toda $\psi \in Y^*$ se cumple que $\psi \circ T \in X^*$. Prueba que T está acotada.

3. (6 puntos) Sea X un espacio de Banach. Prueba que si X^{**} es separable entonces también X es separable. También da un ejemplo que muestre que el inverso no es válido (justifica tu respuesta).

4. (6 puntos) Sean H un espacio de Hilbert y sea $A : D(A) \subset H \to H$ un operador lineal densamente definido.

   a) Prueba $\ker(A^*) = \operatorname{ran}(A)^\perp$ y $\ker(A) \subset \operatorname{ran}(A^*)^\perp$.

   b) Supóngase además que A es cerrado. Prueba $\ker(A) = \operatorname{ran}(A^*)^\perp$.

   Notación: para subconjunto $S \subseteq H$

   $$S^\perp = \{x \in H : \langle x, s \rangle = 0, \text{para toda } s \in S\}$$

   Por $\ker(A)$ denotamos el kernel de A y por $\operatorname{ran}(A)$ su rango.

5. (6 puntos) Sea $(T_n : H \to H)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores lineales acotados autoadjuntos, definidos en un espacio de Hilbert H. Supón que la sucesión converge en norma de operadores a un operador lineal acotado $T : H \to H$, es decir $\|T_n - T\| \to 0$.

   Demuestra que T también es autoadjunto.

6. (6 puntos) Sea $T : H \to H$ un operador lineal acotado, normal definido en un espacio de Hilbert complejo H. Demuestre que $\lambda \in \mathbb{C}$ pertenece al conjunto resolvente $\rho(T)$ si y sólo si existe $c > 0$ tal que para todo $x \in H$

$$\|T_\lambda x\| \geq c\|x\| \qquad (T_\lambda = T - \lambda I).$$

   Sugerencia para el recíproco: prueba que $\|T_\lambda x\| = \|(T_\lambda)^* x\|$ y recuerda que $\overline{S} = (S^\perp)^\perp$, para todo subconjunto $S \subseteq H$.