Examen de Conocimientos Generales
Análisis Numérico
Semestre 2022-2

Julio 2022

Instrucciones: Resuelva todos los ejercicios explicando con detalle su procedimiento.
Calificación: Suma de puntos dividida por 3. Requiere al menos 18 puntos para aprobar.
Duración: 4 horas.

$\boxed{\mathbf{1}}$ *Representación de los números de punto flotante.* Los números reales se pueden expresar en potencias de 10. Por ejemplo:

$$\frac{34}{3} \quad = 11.3333\ldots \quad = 1 \times 10^1 + 1 \times 10^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}.$$

En general, un número real x se representa en base decimal como:

$$x = \pm(a_n \cdots a_1 a_0.b_1 b_2 b_3 \ldots)_{10} = \pm \left(\sum_{k=1}^{n} a_k 10^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^k} \right),$$

donde $a_k, b_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. La primera suma es la parte entera, mientras que la segunda suma es la parte fraccionaria. Los dígitos son los coeficientes a_k y b_k que acompañan a las potencias de 10. En particular, se le pide verificar esta representación para los números enteros.

a) (2 puntos) Sea $M \in \mathbb{Z}$. Pruebe que existen $d_1, \ldots, d_p \in \{0, \ldots, 9\}$ tales que:

$$|M| = d_1 10^{p-1} + \cdots + d_{p-1} 10^1 + d_p 10^0.$$

Los números reales se redondean con una cantidad finita de dígitos para representarlos en una computadora. La parte fraccionaria se trunca a una suma finita. Por ejemplo, si usamos solo cuatro dígitos después del punto decimal, entonces $x = 34/3$ se aproxima por

$$\widehat{x} = \quad 11.3333 \quad = 1 \times 10^1 + 1 \times 10^0 + \frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4}.$$

No es recomendable fijar la posición del punto decimal entre 10^0 y 10^{-1} para redondear números reales con distintas potencias de 10, ya que el error relativo de redondeo puede cambiar drásticamente. Por ejemplo, si $x = 5.9901$ e $y = 0.0059901$

se truncan usando tres dígitos después del punto decimal, entonces x se aproxima por $\widehat{x} = 5.99$ con un error relativo $|x - \widehat{x}|/|x| \approx 1.67 \times 10^{-5}$, mientras que y se aproxima por $\widehat{y} = 0.005$ con un error relativo $|y - \widehat{y}|/|y| \approx 0.16$.

La posición del punto se cambia junto a la potencia más grande de 10 para evitar cambios abruptos en el error relativo de redondeo. Por ejemplo: $y = 0.0059901$ se escribe como $y = 5.9901 \times 10^{-3}$, se trunca a tres dígitos significativos como $y = 5.99 \times 10^{-3}$, y su error relativo de redondeo es $|y - \widehat{y}|/|y| \approx 1.67 \times 10^{-5}$. Se puede probar que un número representado por una cantidad finita de dígitos se puede escribir en notación científica.

b) (2 puntos) Un número en base decimal con p dígitos significativos es de la forma:

$$x = M \cdot 10^{e-p+1},$$

donde $M, e \in \mathbb{Z}$ tales que $|M| < 10^p$. Pruebe que existen $d_1, \ldots, d_p \in \{0, \ldots, 9\}$ tales que:

$$x = \pm \left(d_1 + \frac{d_2}{10} + \cdots + \frac{d_p}{10^{p-1}} \right) \cdot 10^e.$$

Esto se escribe en notación científica como:

$$x = \pm (d_1.d_2 \cdots d_p)_{10} \times 10^e.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ *Matrices Definidas Positivas.* Algunas matrices simétricas dependen de parámetros. Estas matrices pueden ser definidas positivas solamente para algunos valores de los parámetros.

Sean $a, b > 0$. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} b & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}_{n \times n},$$

El problema es hallar condiciones suficientes sobre los valores de a y b de modo que A sea una matriz definida positiva.

Una manera para identificar fácilmente los valores deseados de a y b es intercambiar los renglones y columnas de la matriz A de modo que A se transforme en la matriz:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & b \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

Si se obtienen valores de a y b para los que $\widehat{A}$ es definida positiva, entonces se puede probar que la matriz A es definida positiva con esos mismos valores.

a) (1 punto) Halle una matriz de permutación P de tamaño $n \times n$ tal que

$$A = P^T \widehat{A} P.$$

b) (2 puntos) Tome $n = 5$, $a = n - 1$ y $b = 1$. Pruebe o refute que $\widehat{A}$ es una matriz definida positiva.

c) (2 puntos) Sea $n = 7$. Halle condiciones sobre los valores de a y b de modo que $\widehat{A}$ sea una matriz definida positiva. *Sugerencia:* Factorize la matriz $\widehat{A}$.

d) (1 punto) Pruebe que si $\widehat{A}$ es definida positiva, entonces A es definida positiva.

3 *Curvas Parametrizadas por Polinomios Cúbicos.* El diseño asistido por computadora requiere de curvas suaves que puedan modificarse de manera fácil y rápida. Una familia de curvas que pueden emplearse está parametrizada por polinomios cúbicos de Hermite.

Dados los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1), se desea obtener una curva parametrizada:

$$\phi(t) = (x(t), y(t)) : [0, 1] \to \mathbb{R}^2,$$

donde x e y son polinomios cúbicos que conectan ambos puntos:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \quad x(1) = x_1, \\ y(0) &= y_0, \quad y(1) = y_1. \end{aligned}$$

La recta tangente a la curva ϕ en el punto (x_0, y_0) puede especificarse mediante un punto guía $(x_0 + \alpha_0, y_0 + \beta_0)$, donde

$$\alpha_0 = x'(0), \quad \beta_0 = y'(0).$$

Análogamente, la recta tangente a la curva ϕ en el punto (x_1, y_1) puede especificarse mediante un punto guía $(x_1 - \alpha_1, y_1 - \beta_1)$, donde

$$\alpha_1 = x'(1), \quad \beta_1 = y'(1).$$

a) (2 puntos) Dados $\alpha_i, \beta_i,\ i = 0, 1$. Halle expresiones para los polinomios cúbicos de Hermite x e y en la base canónica $\{1, t, t^2, t^3\}$.

b) Sea ϕ la curva parametrizada por polínomios cúbicos de Hermite que une $(x_0, y_0) = (0, 0)$ con $(x_1, y_1) = (0, 1)$ mediante puntos guía:

$$(x_0 + \alpha_0, y_0 + \beta_0) = (2, 2), \quad (x_0 + \alpha_1, y_0 + \beta_1) = (2, -1).$$

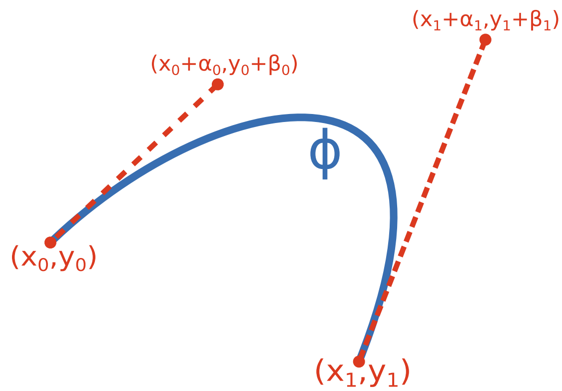

Figura 1: Curva parametrizada ϕ

I. (1 punto) Pruebe que la curva ϕ atraviesa el eje horizontal.

II. (1 punto) Dibuje la curva ϕ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ *Integración Múltiple por Cuadratura Gaussiana.* Se desea aproximar el volumen debajo de una función gaussiana de variables x e y sobre el cuadrado unitario $[0,1]\times[0,1]$ mediante una regla de cuadratura:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^1 \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dxdy \approx \sum_{i=1}^{4} w_i p(x_i,y_i), \tag{1}$$

donde $p(x,y)$ es un polinomio bicuadrático.

a) (3 puntos) Halle pesos $\widehat{w}_i$ y nodos x_i tales que para cualquier polonimio q de hasta grado tres se cumpla:

$$\int_{-1}^{1} q(x)dx = \widehat{w}_1 q(x_1) + \widehat{w}_2 q(x_2) + \widehat{w}_3 q(x_3).$$

Desarrolle su procedimiento.

b) (1 punto) Encuentre el polinomio cuadrático q que interpola la función:

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}},$$

en $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$.

c) (2 puntos) Sea $p(x,y) = q(x)q(y)$. Use la aproximación:

$$\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \approx p(x,y), \quad 0 \le x, y \le 1,$$

para obtener los pesos w_i y los nodos (x_i, y_i) de la regla de cuadratura (1). *Sugerencia:* Use un cambio de variable adecuado.

$\boxed{\mathbf{5}}$ *Teorema de Punto Fijo.* Sea $\phi : [a, b] \to [a, b]$ una función en $C^1([a, b])$ tal que:

$$\max_{a \le x \le b} |\phi'(x)| < 1. \tag{2}$$

Entonces, dado $x_0 \in [a, b]$, la sucesión:

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

converge a un único punto $\alpha \in [a, b]$ tal que $\phi(\alpha) = \alpha$.

Use las hipótesis del Teorema de Punto Fijo para probar lo siguiente:

a) (1 punto) La sucesión $\{x_k\}$ converge.

b) (1 punto) Si $0 < \phi'(\alpha) < 1$ y $x_0 > \alpha$, entonces $x_k > \alpha$ para $k \in \mathbb{N}$.

c) (1 punto) Si $-1 < \phi'(\alpha) < 0$, entonces $x_k - \alpha$ y $x_{k+1} - \alpha$ tienen signos opuestos para $k \in \mathbb{N}$.

La cota sobre la pendiente es una condición suficiente para garantizar que la iteración de punto fijo $\{x_k\}$ converga. Si la cota (2) no se cumple en todos los puntos del intervalo, la sucesión $\{x_k\}$ puede ser divergente.

d) (1 punto) Pruebe que si $|\phi'(\alpha)| > 1$, entonces $\{x_k\}$ no puede converger.

$\boxed{\mathbf{6}}$ *Ajuste de una sección cónica por mínimos cuadrados.* Considere la familia de funciones bicuadráticas $\varphi_{\boldsymbol{\alpha}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\varphi_{\boldsymbol{\alpha}}(x, y) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 xy + \alpha_4 x + \alpha_5 y + 1,$$

donde

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

Se desea ajustar una sección cónica:

$$\varphi_{\boldsymbol{\alpha}}(x, y) = 0,$$

a los puntos (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 8$ dados en la Tabla 1 minimizando la suma de cuadrados:

$$J(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{8} \varphi_{\boldsymbol{\alpha}}(x_i, y_i)^2.$$

i	x_i	y_i
1	0	1
2	$2-\sqrt{3}$	$1/2$
3	2	0
4	$2+\sqrt{3}$	$1/2$
5	4	1
6	$2+\sqrt{3}$	$3/2$
7	2	2
8	$2-\sqrt{3}$	$3/2$

Tabla 1: Puntos $(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, 8$.

a) (2 puntos) Encuentre una matriz $A \in \mathbb{R}^{8\times 5}$ y un vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^8$ tales que

$$J(\boldsymbol{\alpha}) = \|A\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{b}\|_2^2.$$

b) (2 puntos) Supónga que:

$$A = QR,$$

donde Q una matriz de tamaño 8×5 con columnas ortonormales y R una matriz triangular superior de tamaño 5×5 tal que todos sus elementos en la diagonal principal son distintos de cero. Pruebe que el mínimo de J está dado por la solución del sistema de ecuaciones:

$$R\boldsymbol{\alpha} = Q^t\boldsymbol{b}.$$

c) (1 punto) Obtenga las ecuaciones normales correspondientes y compruebe que

$$\boldsymbol{\alpha}_{\text{mín}} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T$$

es la solución de esas ecuaciones.

d) (1 punto) Dibuje la sección cónica $\varphi_{\boldsymbol{\alpha}}(x, y) = 0$ que se obtiene con $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_{\text{mín}}$.