# POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

## Examen General de Análisis Real

Julio del 2022
Semestre 2022-2

---

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

---

1. (6 puntos) Sea $(X, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con la propiedad $f_n \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Suponiendo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty$$

prueba que existe una función $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge a $f$ casi dondequiera con respecto a la medida $\mu$ y que

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

2. (6 puntos) Sea $(X, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida. Prueba que si $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$, $1 \le p \le \infty$, y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sucesión de conjuntos medibles tales que $\text{lím}_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ entonces

$$\text{lím}_{n\to\infty} \int_{A_n} f d\mu = 0$$

3. (6 puntos) Prueba que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

donde $\mathcal{B}$ denota a la sigma álgebra de Borel y $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) := \{A \times B : A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

Sugerencia: Prueba primero que

$$\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : B \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\} = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

4. (6 puntos) Sean $1 \leq p < q < \infty$. ¿Falso o verdadero ? (si es verdadero hay que probarlo y si es falso hay que dar un contraejemplo). Nota: $\lambda$ denota la medida de Lebesgue.

   (a) $L_p(\mathbb{R}, \lambda) \subseteq L_q(\mathbb{R}, \lambda)$.
   (b) $L_q(\mathbb{R}, \lambda) \subseteq L_p(\mathbb{R}, \lambda)$.
   (c) $L_p([0,1], \lambda) \subseteq L_q([0,1], \lambda)$.
   (d) $L_q([0,1], \lambda) \subseteq L_p([0,1], \lambda)$.
   (e) $\ell_p \subseteq \ell_q$.
   (f) $\ell_q \subseteq \ell_p$.
   (g) $p \leq s \leq q$ si y sólo si $Ł_p(\mathbb{R}) \cap L_q(\mathbb{R}) \subseteq L_s(\mathbb{R}, \lambda)$.

5. (6 puntos) Sea $X$ un conjunto no vacío y considera a $\mathbb{R}$ dotado con la $\sigma$-álgebra de los Borel medibles (es decir la $\sigma$-álgebra generada por los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$).

   Supongamos que $\{B_i\}_{i=1}^n$ es una particíón de $X$, es decir $\{B_i\}_{i=1}^n$ es una familia de subconjuntos de $X$, ajenos dos a dos, cada $B_i$ es un conjunto no vacío y $\cup_{i=1}^n B_i = X$.

   Sea $\{b_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ un subconjunto de $n$ números distintos en $\mathbb{R}$. Definamos $f : X \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \mathbb{1}_{B_i}(x) \quad \text{para toda } x \in X.$$

   donde $\mathbb{1}_B$ denota la función característica del subconjunto $B$.

   Encuentra **explícitamente** la $\sigma$-álgebra más pequeña en $X$ que haga medible a la función $f$.

6. (6 puntos) Sean $X = (0,3)$, $A_1 = (0,1)$, $A_2 = (0,2)$ y $A_3 = X$. Definamos

$$\mathcal{C} = \{A_1^{i_1} \cap A_2^{i_2} \cap A_3^{i_3} \mid i_1, i_2, i_3 \in \{0,1\}\},$$

   donde $A_j^1 = A_j$ y $A_j^0 = X \backslash A_j = A_j^c$, el complemento de $A_j$, para cada $j \in \{1,2,3\}$.

   *a*) Encuentra todos los elementos de $\mathcal{C}$.
   *b*) Llamamos un **átomo** a un elemento de la forma $A_1^{i_1} \cap A_2^{i_2} \cap A_3^{i_3}$ si es no vacío. Encuentra todos los átomos.
   *c*) Prueba que la unión de todos los átomos es una partición de $X$
   *d*) Por $\mathcal{B}$ denotamos a la familia de subconjuntos de $X$ que se obtienen mediante uniones de átomos. Prueba que $\mathcal{B}$ es una $\sigma$-álgebra en $X$ y que es la $\sigma$-álgebra más pequeña en $X$ que contiene a $A_1, A_2$ y $A_3$.
   *e*) Si definimos a $\mu$ en $\mathcal{B}$ tal que $\mu(A_3) = 1, \mu(A_2) = 1/4$ y $\mu(A_1) = 1/2$ y utilizando las reglas usuales evaluamos $\mu$ en los restantes elementos de $\mathcal{B}$. ¿ Es $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida?