Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre 2022-2

Instrucciones:

- Duración: 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja.
- La calificación mínima aprobatoria es 60 puntos.

1. (20 puntos) Encuentre la solución al problema de valores iniciales de la ecuación lineal no homogénea

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x + y + 1,\ x(0) = 1\\ \dot{y} &= -3x + 2y + 1,\ y(0) = 0.\end{aligned}$$

2. (20 puntos) Considere el sistema de ecuaciones con coeficientes perioódicos

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \left(a + \sin^2(t)\right)\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

Use la teoría de Floquet para encontrar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales todas las soluciones del sistema son acotadas. *Hint*: Hacer un cambio de variables para diagonalizar el sistema o hacer el cambio de variables temporal $t \to \tau = x_0 \exp \int_0^t \left(a + \sin^2(s)\right)\ \mathrm{d}s$.

3. (20 puntos) Sea

$$U(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+1}$$

(a) Escribir la ecuación conservativa $\ddot{x} = -U'(x)$ como un sistema de ecuaciones. Ver que $(x, y) = 0$ es el único equilibrio estable. Encontrar el sistema linealizado en el equilibrio y la solución fundamental del sistema linealizado.

(b) Usar el hecho de que el sistema $\ddot{x} = -U'(x)$ es conservativo para diseñar con detalle el diagrama fase del sistema.

(c) ¿Cómo es el flujo de la ecuación gradiente $\dot{x} = -U'(x)$?

4. (20 puntos) Sea $V(x, y) = x^2 + y^2$.

(a) Usar la función de Lyapunov V para probar que el origen en asintóticamente estable en la ecuación

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy^2 - x^3,\\ \dot{y} &= \frac{x^2 y}{\pi} - y^3.\end{aligned}$$

(b) Usar V y el teorema de Poincaré-Bendixon para probar la existencia de una solución periodica del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= -x + y(1 - x^2 - 4y^2).\end{aligned}$$

5. (20 puntos) Sea el sistema

$$\dot{x} = x,$$
$$\dot{y} = -y + x^2,$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

(a) Resuelva el sistema y obtenga el flujo $\varphi_t(x, y)$. Obtenga las variedades estables e inestables del origen.

(b) Grafique las soluciones y las variedad estable e inestable.