**Posgrado en Ciencias Matemáticas**
**Examen General de Ecuaciones Diferenciales Parciales**
Semestre 2022-2

**Instrucciones:**

- Duración: 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja.
- La calificación mínima aprobatoria es 60 puntos.

**1.** (20 puntos) Aplica el método de características para calcular la solución al siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} u_t + 5xt^2 u_x &= u + 2, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) &= x + 2. \end{aligned}$$

Haz un dibujo de las curvas características en el plano y encuentra la solución explícita.

**2.** (20 puntos) Encuentra la única solución entrópica (para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$) al siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 2, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

**3.** (20 puntos) Usar la fórmula de Poisson para encontrar una solución al siguiente problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R},\ y > 0 \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Verifica que la fórmula obtenida es, efectivamente, una función armónica que satisface

$$\lim_{y \to 0^+} u(x,y) = g(x), \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Calcula $\displaystyle\lim_{y \to 0^+} u_y(1,y)$.

**4.** (20 puntos) Sean $L, D > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}), \qquad \text{con} \quad f(x) = 0, \qquad \text{si } |x| \geq \frac{L}{2}.$$

Supongamos que $u \in C_1^2([-L,L] \times [0,\infty))$ es solución del siguiente problema con valores iniciales,

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = \gamma u, & x \in (-L,L),\ t > 0, \\ u(-L,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in [-L,L]. \end{cases}$$

Finalmente, supongamos que

$$\int_{-L}^{L} f(x) \sin\left[\frac{\pi}{2L}(x+L)\right]\, dx > 0.$$

Demuestra que existe $\gamma_c > 0$ tal que

$$\lim_{t\to+\infty} \max_{x\in[-L,L]} |u(x,t)| = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \gamma > \gamma_c, \\ 0, & \text{si } \gamma < \gamma_c. \end{cases}$$

Calcula $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$, cuando $\gamma = \gamma_c$.

**5.** (20 puntos) Supongamos que $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ es solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = h(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde $g$ y $h$ son funciones de clase $C^2$ y de soporte compacto (es decir, $g = h = 0$ fuera de un interval $[-R,R]$, para cierto $R > 0$). La energía cinética está dada por

$$k(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x,t)\, dx,$$

y la energía potencial es

$$p(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(x,t)\, dx.$$

Muestre que:

(a) la energía total $E(t) = k(t) + p(t)$ es constante en el tiempo $t$;

(b) existe $T > 0$ tal que $k(t) = p(t)$ para todo $t \geq T$.