Examen General de Estadística
Semestre 2022-2
Agosto, 2022.
9:00-14:00 hrs

Instrucciones: Deberá responder todas las preguntas del examen justificando sus respuestas. Se requieren 4/6 puntos para aprobar el examen. Tiempo máximo de examen: 5 horas.

1 (*Normalidad asintótica de los EMV*) Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de $X \sim f(x|\theta)$, en donde $\theta \in$. Asumiendo que $\widehat{\theta}_n$ es el estimador máximo verosímil de θ y que se cumplen las *condiciones de regularidad*, demuestra que

$$\frac{(\widehat{\theta}_n - \theta)}{se} \xrightarrow{D} N(0,1),$$

en donde $se \approx \dfrac{1}{\sqrt{nI(\theta)}}$, con

$$I(\theta) = \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X|\theta) \right\}^2 \right).$$

[Valor: 6 puntos]

2 Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de la distribución

$$P(X_i \leq x|\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ (x/\beta)^\alpha & \text{si } 0 \leq x \leq \beta, \\ 1 & \text{si } x > \beta, \end{cases}$$

en donde α y β son positivos.

1. Encuentra una estadística suficiente bidimensional para (α, β).
2. Obtén los estimadores máximo verosímiles para α y β.
3. Asumiendo α_0 como una constante conocida, encuentra un intervalo superior para β del 95 % de confianza (Hint: Obtén la distribución de $X_{(n)}/\beta$).

[Valor: 6 puntos]

3 Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Uniforme $(\theta, \theta + 1)$. Para probar $H_0 : \theta = 0$ vs. $H_1 : \theta > 0$, se rechaza H_0 si $Y_n \geq 1$ o $Y_1 \geq k$, donde k es una constante y $Y_1 = \min(X_1, \ldots, X_n)$ y $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Determina el valor de k para que la prueba tenga tamaño α.

b) Encuentra una expresión para la potencia de la prueba en a).

c) Prueba que es uniformemente más potente.

[Valor: 3 puntos]

4. *Fundamentos*

Responde brevemente las siguientes preguntas.

(a) ¿Qué caracteriza al enfoque bayesiano de la inferencia estadística?

(b) ¿Qué papel juega el concepto de intercambiabilidad en la estadística bayesiana?

(c) ¿Cuál es la definición bayesiana de una estadística suficiente?

(b) Menciona tres diferencias entre los enfoques frecuentista y bayesiano de la estadística.

5. *Inferencia*

En un esquema de inferencia secuencial tradicional, la información se actualiza conforme se va recibiendo cada observación. EspecÃficamente, en una primera etapa la distribución inicial $p(\theta)$ se actualiza (por medio de la regla de Bayes) con la observación $Y_1 \sim p(y|\theta)$ para obtener la distribución final $p(\theta|y_1)$. Esta distribución se puede pensar entonces como la "distribución inicial" de θ para la segunda etapa, en la que se observa el valor de $Y_2 \sim p(y|\theta)$. Al igual que antes, esta distribución se actualiza por medio de la regla de Bayes para obtener la distribución final $p(\theta|y_1, y_2)$, y asÃ sucesivamente.

Considera el caso de la distribución normal, en el que $p(\theta) = N(\theta|m_0, w_0)$ (donde la media m_0 y la varianza w_0 son conocidas) y $p(y|\theta) = N(y|\theta, v)$

(donde la varianza v es conocida). Supón que se observan los valores de $Y_1 \sim N(y|\theta, v)$ y $Y_2 \sim N(y|\theta, v)$ de manera independiente.

(a) Encuentra la distribución final de la primera etapa, $p(\theta|y_1)$.

(b) Encuentra la distribución final de la segunda etapa, $p(\theta|y_1, y_2)$.

Supón ahora que, a diferencia del esquema secuencial tradicional, antes de observar el valor de Y_2 recibes información adicional que indica que el valor de θ se ha modificado. EspecÃficamente, supón que la media de Y_2 ya no es θ sino

$$\tilde{\theta} = \theta + \epsilon, \tag{1}$$

donde la perturbación aleatoria $\epsilon \sim N(0, u)$ es independiente de θ (con u conocida).

(c) Encuentra la "distribución inicial" $p(\tilde{\theta}|y_1)$ que describe la información sobre $\tilde{\theta}$ en la segunda etapa, es decir, antes de observar el valor de Y_2.

(d) Encuentra la distribución final $p(\tilde{\theta}|y_1, y_2)$ de la segunda etapa, es decir, la distribución que describe *toda* la información sobre $\tilde{\theta}$ una vez que se observa $Y_2 \sim N(y|\tilde{\theta}, v)$.

(e) Responde las siguientes preguntas:

(i) ¿De qué manera difieren $p(\theta|y_1, y_2)$ y $p(\tilde{\theta}|y_1, y_2)$?

(ii) ¿Qué ocurre con $p(\tilde{\theta}|y_1, y_2)$ cuando $u \to 0$?

(iii) ¿Qué ocurre con $p(\tilde{\theta}|y_1, y_2)$ cuando $u \to \infty$?

6. *Problemas de decisión estadísticos*

Supón que $\boldsymbol{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ es una muestra aleatoria de una distribución $p(x|\theta)$, con $\theta > 0$, y sea $p(\theta)$ la distribución inicial de θ. Estos elementos dan lugar a $p(\theta|\boldsymbol{x})$, la distribución final de θ.

Considera ahora la siguiente familia de funciones de pérdida para la estimación puntual de θ, vista como un problema de decisión estadístico:

$$L(\hat{\theta}, \theta) = \frac{(\hat{\theta} - \theta)^2}{\hat{\theta}^r \theta^s}; \quad \text{donde } r, s = 0, 1, 2.$$

Encuentra el estimador bayesiano óptimo de θ.