Examen General de Finanzas Matemáticas

de junio 2022
Duración: 11:00-15:00 hrs

NOTA: Cada problema contestado correctamente en su totalidad y con solución justificada cuidadosamente, vale un punto. Los puntos serán obtenidos sumando la calificación completa o parcial obtenida en cada ejercicio. La calificación mínima para aprobar es de tres puntos.

Finanzas a tiempo discreto.

1. Demostrar que un Call americano tiene el mismo precio que un Call europeo en un mercado completo.
2. Definir el modelo binomial (también llamado modelo CRR). Evaluar en este modelo el precio en $t = 0$ de una opción europea con pay-off $(\frac{S_T}{S_{T_0}} - K)_+$ donde $T_0 < T$, $K > 0$, y S_t denota el precio del activo con riesgo en el tiempo t.

Teoría del Riesgo.

3. Sea Z una variable aleatoria que representa una pérdida. Recuerde que el valor en riesgo a nivel α de la variable Z, denotado por $VaR_\alpha(Z)$ se define por
$$VaR_\alpha(Z) = \inf_{t\geq 0}\{P(Z \leq t) \geq 1-\alpha\}.$$
Demostrar rigurosamente que el mínimo de la función
$$f(b) = b + \frac{1}{1-\alpha}E[Z-b]_+$$
se alcanza en $VaR_\alpha(Z)$. Sugerencia: utilice el teorema de Fubini.
4. Considere el proceso de riesgo de Cramér-Lundberg
$$R_t = u + \beta t - \sum_{i=1}^{N_t} U_i,$$
en donde $u, \beta \geq 0$, N es un proceso de Poisson de parámetro λ y las variables U_i son independientes y tienen función de distribución continua F. Considere la función
$$H(u,z) = P(\tau < \infty, -R_\tau > z | R_0 = u)$$
donde τ es el tiempo de ruina. A la variable $-R_\tau$ se le llama severidad de la ruina.
a) Condicionando sobre el tiempo y monto de la primera reclamación, demostrar que
$$\frac{\partial}{\partial u}H(u,z) = \frac{\lambda}{\beta}\left(H(u,z) - \int_0^u H(u-y,z)dF(y) - \bar{F}(u+z)\right)$$

donde $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$.
b) Integrando de 0 a u la ecuación anterior, demostrar que

$$H(0,z) = \frac{\lambda}{\beta}\int_z^\infty \bar{F}(y)dy$$

y

$$H(u,z) = \frac{\lambda}{\beta}\left(\int_{u+z}^\infty \bar{F}(y)dy + \int_0^u H(u-y,z)\bar{F}(y)dy\right)$$

para $u > 0$.
c) Determinar $H(u,z)$ cuando las reclamaciones tienen distribución exponencial de parámetro δ. Hallar $\lim_{z\to\infty} H(u,z)$.

Finanzas a tiempo continuo.

5. Sea B un movimiento browniano y sea $S_t = \exp\{\sigma B_t + \mu t\}$. Sea $R_t = e^{rt}$. Encuentre, gracias a la formula de Itô, una función $f(t,x)$ tal que tanto $f(t,B_t)$ como $f(t,B_t)\frac{S_t}{R_t}$ sean integrales estocásticas y por tanto martingalas.

6. Calcular la formula explícita del precio de un bono cupón cero, que da una unidad al tiempo T, cuando la tasa de interés instantaneo sigue el modelo estocástico dado por

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$$

donde W es un movimiento browniano, y $r_0, k, \theta, \sigma > 0$.