Examen General de Geometría Algebraica 2022-2.

(29 de julio del 2022)

Instrucciones: El examen dura **4 horas**. Resolver **sólo 4** ejercicios de los 6 escritos abajo. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor de 2.5 puntos para un máximo de 10. Es necesario obtener 6 de calificación para aprobar el examen y, en ausencia de errores de escritura, 9.5 para obtener mención honorífica.

Todas las variedades están definidas sobre un campo algebraicamente cerrado de característica 0.

1. Sea V una variedad. Si V es variedad afín y proyectiva demuestre que V es igual a un punto.

2. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ un cerrado de dimensión pura $d \geq 1$, esto es, todas sus componentes irreducibles tienen la misma dimensión d. Demuestre que existe una hipersuperficie $H \subset \mathbb{A}^n$ tal que toda componente irreducible de $V \cap H$ es de dimensión $d - 1$.

3. Sea $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ un morfismo, y sea W la imagen de f. Demuestre que W es igual a un punto ó $\dim W = n$.

4. Sea $\mathcal{I}$ el ideal de $K[x, y, z]$ generado por $\{x(y^2 - x^3), (x - z)y)\}$ y sea $\mathbb{W}$ el conjunto de ceros de $\mathcal{I}$ en $\mathbb{A}^3$. Calcúlese

    1. La dimensión de $\mathbb{W}$
    2. La descomposición de $\mathbb{W}$ en componentes irreducibles
    3. El espacio tangente de Zariski de $\mathbb{W}$ y de cada una de sus componentes irreducibles en el origen de $\mathbb{A}^3$

5. Sea $\mathcal{I}$ el ideal de $K[x, y]$ generado por $\{(y^2 - x^3)(y^3 - x^2)\}$ y sea $\mathbb{W}$ el conjunto de ceros de $\mathcal{I}$ en $\mathbb{A}^2$. Calcula las transformadas total y estricta de la explosión de $\mathbb{W}$ en el origen de coordenadas.

6. Demostrar que el mapeo de Segre es un isomorfismo sobre su imagen.

¡SUERTE!