Examen General de Geometría Diferencial 2022-2.

(29 de julio del 2022)

Instrucciones: El examen dura **4 horas**. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor. Es necesario obtener 6 de calificación para aprobar el examen y, en ausencia de errores de escritura, 9.5 para obtener mención honorífica.

1. Sean $C = S^1 \times \mathbb{R}$ el cilindro infinito en $\mathbb{R}^3$ dado por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ la transformación antípoda. Considere también el grupo G generado por A y el espacio cociente $M := C/G$ con la estructura diferenciable dada por la acción propiamente discontinua del grupo G en C. Definimos

$$f : C \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2$$

y

$$V \in \mathcal{X}(C), \quad V = \frac{\partial}{\partial \theta}$$

donde $p = (cos\theta, sen\theta, z)$ está en una carta coordenada cilíndrica $\xi(p) = (\theta, z)$.

   (a) Muestre que f induce $F : M \to \mathbb{R}$ y V induce $W \in \mathcal{X}(M)$.

   (b) Describa la función $V(f) : C \to \mathbb{R}$.

   (c) Describa la función $W(F) : M \to \mathbb{R}$. Compárala con $V(f)$ y explica brevemente tus observaciones.

2. Sean $\mathbb{S}^3$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^4$ dada por la ecuación $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1$ y considere las formas en $\mathbb{S}^3$

$$\omega = -ydx + xdy - vdu + udv$$
$$\theta = xdx + ydy + udu + vdv$$

   (a) La 1-forma ω ¿es cerrada?

   (b) ¿Es exacta?

   (c) Considere la función $\mathcal{X}(\mathbb{S}^3) \times \mathcal{X}(\mathbb{S}^3) \to C^\infty(\mathbb{S}^3)$ dada por

$$(W_1, W_2) \mapsto \theta(W_1)\omega(W_2)$$

   ¿Es un tensor? Justifique su respuesta.

3. Considere la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Sea γ un paralelo de latitud ψ. (Por lo que, si $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ son coordenadas esféricas sobre $\mathbb{S}^2$, entonces $\psi = \pi/2 - \varphi$.) Sea $\mathbf{V}_0$ un vector tangente a $\mathbb{S}^2$ en algún punto de γ, y sea α_0 el ángulo que forma $\mathbf{V}_0$ con γ. Deduzca una expresión para α, el ángulo que forma el transporte paralelo de $\mathbf{V}_0$ a lo largo de γ, en términos de la latitud ψ y la longitud del recorrido sobre γ. En particular, encuentre una expresión para α cuando el recorrido es una vuelta completa sobre γ.

4. Decimos que una variedad Riemanniana M es *homogénea* si para todo $x, y \in M$ existe una isometría f de (M, g) tal que $f(x) = y$. Demuestre que toda variedad Riemanniana homogénea es completa.

5. Pruebe que la curvatura escalar $K(p)$ de un punto p en una variedad riemanniana M $n-$dimensional está dada por:

$$K(p) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{Ric}_p(x)\ dS^{n-1}, \tag{1}$$

donde $\mathrm{Ric}_p(x)$ es la curvatura de Ricci en la dirección x, ω_{n-1} es el área de la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ en T_pM y dS^{n-1} es el elemento de área de $\mathbb{S}^{n-1}$. Recuerde que el cociente del volumen de la bola unitaria B^n entre el área de la esfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$ es $\frac{1}{n}$.

¡SUERTE!