Examen general de Matemáticas discretas 2022-2
(Teoría de gráficas)

Posgrado en Ciencias Matemáticas UNAM

Viernes 5 de agosto de 2022

Para pasar el examen se requieren 6 puntos.

Problema 1 (2 Puntos)**.** *La gráfica de Turán $T_{k,n}$ es la gráfica simple k-partita completa de orden n cuyas partes son todas de cardinalidad $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ o $\lceil \frac{n}{k} \rceil$.*

a) Muestra que $T_{k,n}$ tiene más aristas que cualquier otra gráfica simple k-partita completa de orden n.

b) Sea $n = qk + r$ para enteros q y r con $0 \leq r < k$. Muestra que $e(T_{k,n}) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2 - r^2}{2} + \binom{r}{2}$.

Problema 2 (2 Puntos)**.**

a) Sea G una gráfica autocomplementaria, es decir, tal que $G \cong \overline{G}$. Sea $P = x_1x_2x_3x_4$ una trayectoria de longitud 3 disjunta de G. Construye una gráfica H a partir de $G \cup P$ incluyendo las aristas vx_1 y vx_4 para todo $v \in V(G)$. Muestra que H es autocomplementaria.

b) Muestra que existe una gráfica autocomplementaria de orden n si y solo si $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$.

Problema 3 (1 Punto)**.** *Muestra que, si G es una gráfica simple de diámetro dos y grado máximo $\Delta = n - 2$, entonces G tiene al menos $2n - 4$ aristas.*

Problema 4 (1 Punto)**.** *Sea G una gráfica conexa con al menos 3 vértices y sea uv una arista de corte en G. Muestra que ya sea u o v es vértice de corte en G.*

Problema 5 (2 Puntos)**.** *Una gráfica k-conexa G es k-conexa minimal si la gráfica $G \setminus e$ no es k-conexa para ninguna arista $e \in E(G)$.*

a) Sea G una gráfica 2-conexa minimal de orden n. Muestra que (i) $\delta(G) = 2$ y (ii) si $n \geq 4$, entonces $e(G) \leq 2n - 4$.

b) Exhibe una gráfica 2-conexa minimal de n vértices y $2n - 4$ aristas para toda $n \geq 4$.

Problema 6 (2 Puntos)**.**

a) Sea M un emparejamiento perfecto de una gráfica G y sea $S \subseteq V(G)$. Muestra que

$$|M \cap \partial(S)| \equiv |S| \pmod{2}.$$

b) Deduce que, si M es un emparejamiento perfecto de la gráfica de Petersen y C es el conjunto de aristas de uno de sus 5-ciclos, entonces $|M \cap C|$ es par.