EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD
SEMESTRE 2022-II, 27 DE JULIO DE 2022

Duración: 6 horas
Instrucciones:

1. La calificación aprobatoria mínima es de 5 puntos.
2. Cada problema vale 1 punto.
3. Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
4. Puede suponer cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Para un real fijo c defina $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \begin{cases} c & \text{si} \quad x < 1 \\ c + \frac{2^n - 1}{2^n} & \text{si} \quad n \leq x < n+1, \end{cases}$$

para n entero positivo.

1.1 Demuestre que F es creciente y continua por la derecha.

1.2 Sea $\mathcal{C} = \{(a,b] \mid -\infty < a \leq b < \infty\}$, y defina $\mu_F : \mathcal{C} \to [0,\infty]$ tal que

$$\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a) \quad \text{para cada} \quad (a,b] \in \mathcal{C}. \tag{1}$$

Utilice el hecho de que μ_F se puede extender de manera única a una medida μ en todo el σ-álgebra generado por $\mathcal{C}$, donde $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, que coincide con los borelianos de $\mathbb{R}$, y calcule $\mu([n, n+1])$ para todo entero positivo.

1.3 Demuestre que $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

1.4 Pruebe que si H es una función de distribución, c un real y definimos $G(x) = c + H(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$, entonces G es creciente y continua por la derecha. Si definimos μ_G como en la ecuación (1), entonces la extension de μ_G a todo $\sigma(\mathcal{C})$ es idéntica a la medida generada por H, independientemente de la c elegida.

Problema 2. Sean X y Y variables aleatorias no negativas con variancia finita. Pruebe que

$$\mathbb{C}ov\,(X,Y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x, Y > y) - \mathbb{P}(X > x)\,\mathbb{P}(Y > y)\,dxdy.$$

Problema 3. Muestre que si $X_1, \ldots, X_n$ son exponenciales independientes de media uno entonces $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$ y $S_n = X_1 + X_2/2 + \cdots + X_n/n$ tienen la misma distribución. *Sugerencia: Primero calcule la transformada de Laplace de la suma. Luego, calcule la densidad de M_n para obtener su transformada de Laplace. (Para esto, integre por partes n veces en $\int_0^1 n y^{n-1}(1-y)^\lambda\,dy$ para deducir su valor exacto.)*

Problema 4. Enuncie y pruebe una desigualdad tipo Jensen para espacios de medida finita.

2. Procesos Estocásticos

Problema 5. Sea $X = \{X_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ una cadena de Markov con espacio de estados contable E y matriz de transición P tal que $X_0 = x$ con probabilidad 1. Sea T_n el tiempo en que ocurre la visita $n+1$ al estado x.

5.1 Pruebe que T_n es un tiempo de paro para cualquier n.

5.2 Pruebe que si x es recurrente entonces $\{T_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ es una caminata aleatoria. ¿Es esto cierto si x es transitorio?

5.3 Pruebe que si x es transitorio, entonces la cantidad de visitas de X al estado x es una variable aleatoria geométrica. ¿Cuál es su parámetro?

Problema 6. Sea $\{X_t,\, t \geq 0\}$ un proceso de Poisson homogéneo de parámetro λ y sea W_n el instante en el cual ocurre el n-ésimo evento.

6.1 Demuestre que para $0 < t_1 < t_2$ ocurre

$$\mathbb{P}(W_1 > t_1, W_2 > t_2) = e^{-\lambda t_2}[1 + \lambda(t_2 - t_1)].$$

6.2 Derivando esta fórmula, halle la densidad conjunta de W_1 y W_2.

6.3 A partir de ahí encuentre las densidades marginales de W_1 y W_2 y la densidad condicional para W_1 dado que $W_2 = t_2$.

Problema 7. Sean $X = \{X_n\}$ y $Y = \{Y_n\}$ dos martingalas respecto de la misma filtración $\{\mathcal{F}_n\}$. Suponga que $X_n, Y_n \in L^2$. Pruebe la siguiente fórmula de integración por partes, verificando que cada término está bien definido y es finito:

$$\mathbb{E}(X_n Y_n) = \mathbb{E}(X_0 Y_0) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}((X_i - X_{i-1})(Y_i - Y_{i-1}))\,.$$

Problema 8. Dé la definición de proceso Gaussiano y de movimiento Browniano (como proceso Gaussiano). Un puente Browniano (de longitud uno entre cero y cero) es un proceso Gaussiano centrado $P = \{P_t,\, t \in [0,1]\}$ con función de autocorrelación $c(s,t) = \mathbb{E}(P_s P_t) = s(1-t)$, para $0 \leq s \leq t \leq 1$. Pruebe que si P es un puente Browniano entonces el proceso $\{B_t,\, t \geq 0\}$, dado por $B_t = (1+t)P_{\frac{t}{1+t}}$, es un movimiento Browniano.