Examen General de Medios Continuos

Resuelva tres de los cuatro problemas propuestos.
Tiene tres horas para resolver los tres problemas.

1. Sea el Langrangiano

$$L = -mc^2\left(1 - \frac{|\dot{q}|^2}{c^2}\right) - V(q),$$

con $q = (q_1, q_2) \in \mathbf{R}^2$, $|\cdot|$ la norma Euclideana, m, c constantes positivas. Este es el Langrangiano de una partícula puntual de masa m según la teoría relativista, c representa la velocidad de la luz.

(a) Recordando la noción de *energía* de un sistema de Lagrangiano autónomo, definida por

$$E = \sum_j q_j \frac{\partial L}{\dot{q}_j} - L(q, \dot{q}).$$

Muestre que E es un constante del movimiento. Use esto para indicar dos constantes del movimiento para el problema arriba, suponiendo que $V(q) = V(|q|)$.

(b) Sea $V(q) = -K|q|^{-1}$, este es el caso de energía potencial gravitacional, K un constante positivo. Suponga la existencia de una solución C^1 en $t \in [0, T]$, con $q(0) \neq 0$, $|\dot{q}(0)| < c$, y $q(t) \neq 0$, $\forall t \in [0, T]$. Muestre que

$$|\dot{q}(t)| < c, \quad \forall t \in [0, T].$$

Discuta las condiciones para $|q(t)| \to c$.

2. Sea la ecuación

$$cu + u^2 + u_{xx} = 0,$$

y su perturbación singular

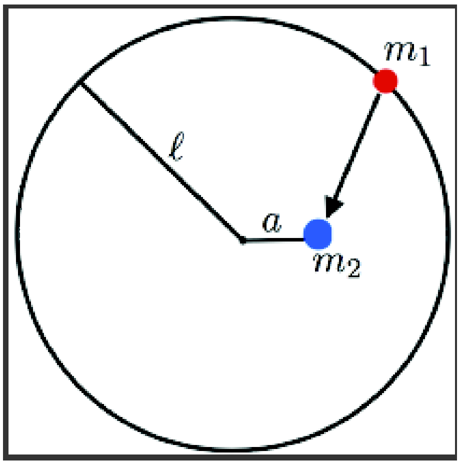
$$cu + u^2 + u_{xx} + \epsilon u_{xxxx} = 0,$$

$c < 0$, $\epsilon > 0$ para una función real $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, por lo menos C^4.

(a) Escriba la primera ecuación como un sistema conservativo con un grado de libertad. Identifique los puntos fijos, haga un dibujar cualitativo del plano fase e identifique las soluciones tales que $u(x) \to 0$ para $x \to \pm\infty$.

(b) Escriba la segunda ecuación como sistema de primer orden. Verifique que el origen es un punto fijo y determine su estabilidad lineal.

3. Una partícula de masa m_1 se mueve en un círculo de radio ℓ bajo la atracción gravitacional[1] de una masa m_2 que está fija, localizada en el interior del círculo a una distancia $0 < a < \ell$ del centro (ver figura).



(a) Encuentre el Lagrangiano del sistema. (Sugerencia: escribir el sistema en coordenadas polares (r, θ).)

(b) Encuentre el Hamiltoniano.

(c) Encuentre la energía del sistema, $E(\theta, \dot{\theta})$ y calcular $E(\pm\pi, 0)$ y $E(0, 0)$.

(d) Haga un dibujo cualitativo del plano de fases. Clasifique los puntos de equilibrio del sistema de acuerdo a su estabilidad. (Sugerencia: usar (c).)

(e) Para los equilibrios estables del sistema, encuentre el período de pequeñas oscilaciones.

(f) Suponga que al tiempo inicial la masa m_1 está alineada con la masa m_2 y el centro del círculo, $\theta = 0, \pm\pi$. Calcule la velocidad angular para que m_1 complete al menos una vuelta al círculo.

[1] La atracción gravitacional entre dos masas puntuales está dada por

$$F = \frac{G m_1 m_2}{d(x_1, x_2)},$$

donde x_i es la posición de la masa m_i.

4. Dos paralelepípedos de largo A y lados B, donde $A >> B$ y cuya masa de cada uno es m, están unidos por una bisagra en su extremos superior, la bisagra no tiene fricción. Este par de paralelepípedos están montados sobre un cilindro fijo de radio C, donde $A > 2C$ y se mueven sobre el cilindro sin fricción. La gravedad empuja hacia abajo a los paralelepípedos, tal como se ve en la figura.

    a) Si los paralelepípedo están inicialmente colocados simétricamente sobre la vertical (como se ve en la figura) y forman ambos paralelepípedos un ángulo ω_0 al tiempo $t = 0$, determine el lagrangiano que determina el movimiento del centro de masa de los paralelepípedos.