Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Examen general: Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias
Otoño, 2021

Código (e.g. MAHV19760313)

Instrucciones. Tiene 3 horas a partir de la hora de inicio de su lectura para entregar el examen. Habrá un periodo corto de aproximadamente 10 minutos de tiempo para lectura de preguntas antes de comenzar el trabajo para el examen. Entregue una sección de respuestas y adjunte en una sección separada su trabajo en borrador. Se le recomienda que comience a redactar la sección de respuestas al menos 15 minutos ***antes*** de la hora límite. Tome en cuenta que tiene menos de tres horas para trabajar en su examen. En la esquina superior derecha de cada página, escriba sus iniciales comenzando por su nombre, seguidas de su fecha de nacimiento en 8 dígitos (e.g. MAHV19760313). Favor de no escribir en la tabla de la derecha. Entregue su examen ***en un solo archivo pdf*** cuyo nombre comience como en sus hojas de examen (e.g. MAHV19760313_snEDO.pdf). Los examenes que no cumplan con las instrucciones, o que no sean legibles (e.g. respuestas con tachones o borrones) no serán calificados.

Problema	Max	Puntos
1	50	
2	60	
3	30	
4	40	
Total:	180	

Preguntas

1. *Estabilidad en problemas de valor inicial.* Sea $\partial_t x = f(t, x(t))$, con $x(a) = x_a$. Suponga que busca una solución en un intervalo finito $a < t < b$. Sean $\varepsilon > 0$ y x_ε la solución a la ecuación a partir del valor inicial $a + \epsilon$ (problema perturbado).
   (a) (10 puntos) ¿Qué condiciones tienen que satisfacer para que una solución $x(t)$ exista y sea única?
   (b) (20 puntos) ¿Qué condiciones se tienen que cumplir para que el problema de valor inicial sea estable? Es decir,
   $$\text{máx}\left\{|x_\epsilon(t) - x(t)| : a \le t \le b\right\} \le c\varepsilon,$$
   para alguna $c > 0$. Ilustre su respuesta con dos ejemplos simples, uno para soluciones estables, y uno para inestabilidad.
   (c) (10 puntos) ¿Qué tiene que ver la estabilidad con la existencia y unicidad de las soluciones? Explique de la manera más formal posible.
   (d) (10 puntos) Demuestre que
   $$x(t) - x_\varepsilon(t) = -\varepsilon \exp\left(\int_a^t g(s)ds\right),$$
   con $g(t) = \partial_z f(t, z)$ en $z = x(t)$, para x suficientemente cercano a a.

2. *Euler y Runge Kutta.* Considere un problema de valor inicial $\partial_t x = f(t, x)$, con $x(t_0) = x_0$, para $t \in [t_0, b]$. Considere una discretización $t_0 < t_1 < ... < t_N \le b$ y suponga que $t_n = t_0 + nh$, para alguna $h > 0$ y $n \in \{0, ..., N\}$.
   (a) (10 puntos) Describa el método de Euler (hacia enfrente) y defina el error de truncación para dicho método (Pista: considere el teorema de Taylor para aproximar la solución al sistema al rededor de cada punto de la discretización).
   (b) (20 puntos) Describa el método de Runge-Kutta de orden 2 (RK2) y escriba pseudo código para describir una iteración en la que pueda calcular soluciones a una ecuación diferencial con Euler y RK2.
   (c) (30 puntos) Describa cualitativamente (puede usar dibujos) y analíticamente la diferencia entre las aproximaciones a las soluciones con Euler hacia en frente y RK2 en mismo paso.

3. (30 puntos) Considere la ecuación lineal $\partial_t x = \alpha x(t) + \beta(t)$, con $t \le t_0$, y α una constante, cuya solución general es
   $$x(t) = ce^{\alpha t} + \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-s)}\beta(s)ds \tag{1}$$
   Verifique que $x(t) \equiv 1$ es la solución al problema $\partial_t x = 1 - x(t)$, con $x(0) = 1$, para $0 \le t \le b$; que la solución al problema perturbado es $x_\epsilon(t) = 1 + \epsilon e^{-t}$, para $t \le 0$; y que (c) la solución al problema de valor inicial es estable en $[0, b]$.

4. *Problema rígido (stiff).* Sean $z(t) = (x(t), y(t))$, $z_0 = (x_0, y_0)$ un valor para un tiempo inicial t_0, y considere el problema
   $$\partial_t z = Az, \quad z(0) = z_0, \tag{2}$$
   con
   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a + ib \end{pmatrix}$$
   con $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) (10 puntos) Calcule la solución de la ecuación (2).

(b) (10 puntos) Suponga que $a << -1$ y $|y_0| << 1$. ¿Son suficientes estas condiciones para llamar rígido al problema? Pista: Describa qué pasa con las soluciones al suponer esas condiciones. En particular, compare las dos componentes de las soluciones y tome en cuenta sus escalas temporales.

(c) (10 puntos) Suponga un paso de tamaño h para calcular una solución numérica. Demuestre que la iteración del mapeo definido por el método de Euler aplicado la ecuación (2) da

$$z_n = (I + hA)^n z_0 = \begin{pmatrix} (1-h)^n v_0 \\ (1 + (a+ib)h)^n w_0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

(d) (10 puntos) Describa las condiciones que tiene que cumplir h para que la aproximación de la solución con $a << -1$ y $|y_0| << 1$ sea buena. Es decir, que

$$z(t) \approx \begin{pmatrix} x_0 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pista: Considere $(1-h)^n$ y $(1-(a+ib)h)^n$ por separado.