Examen General de Topología Algebraica

Este es un examen de 100 puntos. Para aprobar el examen se requiere un mínimo de 75 puntos; y para obtener mención en el examen, un mínimo de 90 puntos. El tiempo para resolver el examen es de 4 horas.

¡Éxito!

1. (20 ptos. en total) Considere el subespacio X de $\mathbb{R}^2$ que consiste de la unión de las circunferencias S_n con centro en $(0, 1/n)$ y radio $1/n$ para cada entero $n \geq 1$. Dicho espacio se conoce con el nombre de *arete hawaiiano*.

   a) (12 ptos.) Sea $\gamma_n : [0,1] \to X$ el lazo dado por $\gamma_n(t) := (\frac{1}{n}\cos(2\pi t), \frac{1}{n}(1+\sin(2\pi t)))$. Demuestre que γ_n representa un elemento no trivial en $\pi_1(X, \vec{0})$.

   b) (8 ptos.) Concluya que el arete hawaiiano no admite un cubriente simplemente conexo.

2. (20 ptos.) Sean S la 2-esfera y T el 2-toro. Calcule el grupo fundamental G de $X := S \vee T$, construya el cubriente universal $\tilde{X} \to X$ y describa la acción por transformaciones de cubierta de G en $\tilde{X}$.

3. (20 ptos.) Construya una función suprayectiva $S^n \to S^n$ de grado cero para cada $n \geq 1$.

4. (20 ptos.) Sean S^n la n-esfera. Demuestre que $S^1 \times S^1$ y $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ tienen grupos de homología (con coeficientes enteros) isomorfos pero no son homotópicamente equivalentes.

5. (20 ptos.) Muestre o dé un contraejemplo para la siguiente afirmación. Sean X, A y B complejos CW compactos tales que $X = A \cup B$, entonces $\chi(X) = \chi(A) + \chi(B)$.