EXAMEN GENERAL DE TOPOLOGÍA DIFERENCIAL
2022-2

Posgrado en Ciencias Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Instrucciones:

1. *Este examen tiene 6 preguntas, cada una de ellas vale 20 puntos.*
2. *Las preguntas marcadas con (*) son obligatorias.*
2. *Para aprobar el examen se requiere de un mínimo de 80 puntos.*
3. *El tiempo para resolver el examen es de 4 horas.*

Ejercicio 1. Sea A una matriz simétrica $n \times n$ y sea $b \in \mathbb{R}$ distinto de cero. Demuestre que $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid xAx^t = b\}$ es una variedad de dimensión $n-1$.

(*) Ejercicio 2. (a) Sea $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ el conjunto de números reales distintos de cero y $p \in \mathbb{R}^3$ fijo. Demuestre que la función $G : \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $G(t, v) = p + tv$, es una sumersión.

(b) Considere la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dado por $f(x, y, z) = (2x^2 + 3xy + z^2, x^2 - 2xy + z^2)$.

(i) Determine los puntos críticos y demuestre que su imagen tiene medida cero (sin usar el Teorema Sard).

(ii) Demuestre que $(6, 0)$ es valor regular y describa $T_{(1,1,1)}f^{-1}(6, 0)$.

Ejercicio 3. Sean $f : M \to N$ y $g : Z \to N$ funciones diferenciables. Decimos que f es *transversal* a g, denotado por $f \pitchfork g$, si siempre que $z = f(x) = g(y)$ tenemos

$$df_x(T_xM) + dg_y(T_yZ) = T_zN.$$

Demuestre que:

(a) $f \pitchfork g$ si y sólo si la función

$$f \times g \colon M \times Z \to N \times N \text{ dada por } f \times g\ (x, y) = (f(x), g(y))$$

es transversal a la diagonal $\Delta = \{(z, z) \in N \times N\}$.

(b) El producto fibrado de f y g

$$\{(x, y) \in M \times Z \mid f(x) = g(y)\}$$

es una variedad diferenciable. ¿Cuál es su dimensión?

Ejercicio 4. (a) Sea $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$ y sea $f : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + xz$. Demuestre que $S = f^{-1}(1)$ es una variedad suave con frontera, y determine su frontera.

(b) Considere $\mathbb{R}$ con la orientación estándar y $\mathbb{H}^3$ con la orientación estándar como subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Considere la *orientación de imagen inversa* (inducida por f) sobre S y escriba explícitamente una base positivamente orientada para $T_x(S)$, donde $x = (0, 1, 0)$.

(*) Ejercicio 5. Sobre $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n/\sim$ considere el subhaz de rango 1

$$\eta = \{([x], \lambda x) |\ x \in \mathbb{S}^n, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

de $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$. Demuestre que efectivamente es un subhaz y pruebe que η es no trivial para $n \geq 1$. *Sugerencia: Considere* $\eta - \{$*sección cero*$\}$.

(*) Ejercicio 6. Para una función suave $f : X \to Y$ transversal a una subvariedad cerrada $Z \subset Y$, donde $\dim X + \dim Z = \dim Y$. Definimos la *intersección módulo 2* por $I_2(f, Z) = |f^{-1}(Z)| \mod 2$. Demuestre las siguientes propiedades:

(a) Si $f : X \to Y$ es homotópica a una constante, muestre que $I_2(f, Z) = 0$ para $Z \subset Y$ subvariedad cerrada $\dim Z < \dim Y$, y se asume que $\dim X \neq 0$.

(b) Si Y es contráctil y $\dim Y > 0$, entonces $I_2(f, Z) = 0$ para cada $f : X \to Y$, con X compacta y Z cerrada con $\dim X + \dim Z = \dim Y$.

(c) Demuestre que ninguna variedad compacta (diferente del espacio de un punto) es contráctil.