Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Topología General Semestre 2022-2

Instrucciones:

- La duración del examen es de 4 horas.
- El examen consta de 6 preguntas, cada una con un puntaje asignado.
- El total de puntos es 11. Para aprobar el examen es necesario obtener al menos 7 puntos. Para recibir mención honorífica es necesario obtener al menos 10 puntos.

Preguntas:

1. **(1.5 puntos)** Falso o verdadero con argumento: el cuadrado lexicográfico L es metrizable (puedes checar la definición en la siguiente página y usar, sin demostrarlo, que L es compacto).

2. **(2 puntos)** Sea $\{X_j : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos con $|J| > 1$. Argumenta cuáles son todas las implicaciones que se cumplen entre las siguientes condiciones:

   (i) $\prod_{j\in J} X_j$ contiene dos subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos.

   (ii) para toda $j \in J$ el espacio X_j contiene dos subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos.

   (iii) existe $j \in J$ tal que el espacio X_j contiene dos subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos.

3. **(1.5 puntos)** Sean (X, τ_X) un espacio compacto y $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una función continua y suprayectiva. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable para X y considera la familia:

$$\mathcal{L} := \Big\{ Y \setminus f\big[X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i\big] : B_i \in \mathcal{B},\ n \in \mathbb{N} \Big\}$$

   para probar que Y es segundo numerable.

4. **(2 puntos)** Sean X un espacio topológico conexo y K un subespacio conexo de X. Supongamos que $X \setminus K$ es la unión de dos subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos U y V. Prueba que si U es conexo, entonces $K \cup U$ también lo es (demuestra todas tus afirmaciones).

5. **(2.5 puntos)** Sea $\mathbb{R}$ la línea real con la topología euclidiana, sea $\mathbb{N}$ el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por los números naturales y sea $r \notin \mathbb{R}$. Consideremos la función $q : \mathbb{R} \to X := (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cup \{r\}$ definida por $q(x) = x$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, y $q(n) = r$ si $n \in \mathbb{N}$. Considera en X la topología cociente definida por q (nota que X es el espacio cociente de $\mathbb{R}$ identificando en el punto r a todos los números naturales).

   Demuestra que en el espacio cociente X el punto r no tiene una base local numerable.

   (Sugerencia: te serviría probar que para cada abierto B que contiene a r en X, $q^{-1}[B]$ es un abierto de $\mathbb{R}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\epsilon_n \in (0, 1/2)$ tal que $(n - \epsilon_n, n + \epsilon_n) \subseteq q^{-1}[B]$.)

6. **(1.5 puntos)** Sea $f : X \to Y$ una función suprayectiva, continua, cerrada y cuyas fibras son compactas. Demuestra que si X es un espacio T_2, entonces Y lo es también.

   (Sugerencia: puedes usar, sin probarlo, que en un espacio T_2 cualquiera dos subespacios compactos ajenos se pueden separar por subconjuntos abiertos ajenos).

Definición 0.1 En $L = [0,1] \times [0,1]$ definimos una relación $<_L$ dada por:

$$(a,b) <_L (c,d) \quad \text{si y sólo si} \quad \begin{cases} a < c & \text{o bien} \\ a = c & \text{y} \quad b < d. \end{cases}$$

Dados $\beta, \delta \in L$ se define $(\beta, \rightarrow) = \{\gamma \in L : \beta <_L \gamma\}$ y $(\leftarrow, \delta) = \{\gamma \in L : \gamma <_L \delta\}$. Sean $\mathcal{S} = \{(\beta, \rightarrow) : \beta \in L\} \cup \{(\leftarrow, \delta) : \delta \in L\}$ y τ la topología generada por la subbase $\mathcal{S}$. Al espacio (L, τ) se le conoce como *cuadrado lexicográfico.*