Examen General de Conocimientos: Álgebra Moderna.
Semestre 2020-I.
8 de enero de 2020.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un **máximo de 3.5 horas**. Escoge y resuelve solamente 3 ejercicios de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. Si se resuelven más de 3 ejercicios en cada sección, se calificarán los 3 primeros. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Sea G el grupo aditivo de $\mathbb{Z}[x]$ y sea H el grupo multiplicativo de todos los racionales positivos. Demuestra que G es isomorfo a H.

2. Un subgrupo H de G es un subgrupo normal maximal si $H \trianglelefteq G$ y no existe subgrupo normal N de G con $H < N < G$. Demuestra que H es un subgrupo normal maximal de G si y sólo si ${}^{G}/_{H}$ es simple.

3. Demuestra que A_5 no tiene subgrupos de orden 30.

4. Sea G un grupo finito y $p_1, ..., p_k$ los distintos primos positivos que dividen a $|G|$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$ sea P_i un p_i-subgrupo de Sylow de G tal que P_i es normal en G. Demuestra que la función:

$$\sigma : \times_{i=1}^{k} P_i \longrightarrow G$$

   dada por $\sigma((y_1, ..., y_k)) = y_1 y_2 ... y_k$ es un isomorfismo de grupos.

5. Demuestra que un grupo G de orden p^n donde p es un primo y n es un natural positivo es nilpotente.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Considera $\mathbb{Z}[x]$, p número primo en $\mathbb{Z}$ y el ideal

$$I = \{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \mid p \text{ divide a cada } a_i\}.$$

   Demuestra que ${}^{\mathbb{Z}[x]}/_{I}$ es un dominio de ideales principales.

2. Sea D un dominio entero. Demuestra que los siguientes enunciados son equivalentes:
(a) El anillo de polinomios $D[x]$ es un dominio de ideales principales;
(b) D es un campo.

3. Considera el conjunto $A \subset \mathbb{C}$ de todos los números complejos que son algebraicos sobre $\mathbb{Q}$ (llamados números algebraicos).
(a) Demuestra que A es una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$.
(b) Demuestra que A no es una extensión finita de $\mathbb{Q}$.

4. Calcula un campo de descomposición del polinomio $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

5. Si $K = F(a_1, a_2, ..., a_n)$ es un campo de descomposición de $f(x) \in F[x]$ donde $gr(f(x)) = n \geq 1$.
(a) Demuestra que el grado de K sobre F es a lo más $n!$
(b) Deduce que K es una extensión algebraica de F.