Examen General de Conocimientos: Álgebra Moderna.
Semestre 2020-II.
9 de septiembre de 2020.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un **máximo de 3.5 horas**. Escoge y resuelve solamente 3 ejercicios de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. Si se resuelven más de 3 ejercicios en cada sección, se calificarán los 3 primeros. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Demuestra que si K es un subgrupo normal de un grupo G tal que el orden de K y el índice de K en G son primos relativos, entonces K es el único subgrupo de G de orden $|K|$.

2. Demuestra que un grupo de orden p^n, donde p es un primo y n es un entero positivo, es nilpotente.

3. Sean G un grupo finito y p un primo que divide al orden de G. Demuestra que el número de p-subgrupos de Sylow de G, divide al orden de G y es congruente con 1 módulo p.

4. Demuestra que si N es un subgrupo normal de un grupo G tal que, tanto N como ${}^{G}/_{N}$ son grupos solubles, entonces G es soluble.

5. Demuestra que todo grupo de orden $5 \times 7 \times 47$ es cíclico.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Demuestra que $\mathbb{Z}[x]$ no es un dominio de ideales principales.

2. Considera $\mathbb{Z}\left[\sqrt{10}\right] := \left\{a + b\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ y una "norma" N definida como $N(x) := |a^2 - 10b^2|$, donde $x = a + b\sqrt{10}$. Demuestra que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{10}\right]$ no es un dominio de factorización única.

3. Sean F un campo y $p(x) \in F[x]$ un polinomio irreducible. Demuestra que existe un campo K que contiene un campo F' isomorfo a F, tal que $p(x)$ tiene una raíz en K, es decir, existe $\alpha \in K$ tal que $p(\alpha) = 0$.

4. Sean $K \leq L \leq E$ extensiones de campo y suponga que E/K y L/K son extensiones de Galois. Demuestra que $Gal\,(E/L)$ es un subgrupo normal de $Gal\,(E/K)$ y que

$$Gal\,(L/K) \cong {}^{Gal(E/K)}\!\big/_{Gal(E/L)}.$$

5. Sea $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$, encuentra un campo de descomposición E de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$ y demuestra que $Gal\,(E\mid_{\mathbb{Q}}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.