Examen General de Conocimientos:
Álgebra Conmutativa.
Semestre 2021-I.
15 de febrero de 2021.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. Cada uno de los seis ejercicios tiene el mismo valor. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Todos los anillos R considerados son conmutativos con elemento unitario.

1. Sean R un anillo noetheriano local y M un R-módulo finitamente generado. Demuestra que si M es un R-módulo plano, entonces M es libre.

2. Sea $f = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in R[x]$. Decimos que f es un polinomio primitivo si el ideal $(a_0, ..., a_n) = R$. Demuestra que si $f, g \in R[x]$, entonces fg es primitivo si y sólo si f y g son primitivos.

3. Sea I un ideal de R. Si $I = Rad(I)$, entonces I no tiene ideales primos encajados, es decir, todos los ideales primos en $Ass\,({}^{R}\!/\!{}_{I})$ son mínimos en ${}^{R}\!/\!{}_{I}$.

4. Sea $\mathfrak{P} \in Spec(R)$. La n-potencia simbólica de $\mathfrak{P}$ es el ideal:
$$\mathfrak{P}^{(n)} = (\mathfrak{P}^n R_{\mathfrak{P}}) \cap R.$$
Demuestra que $\mathfrak{P}^{(n)}$ es un ideal $\mathfrak{P}$-primario.
Nota: Un ideal J en R es $\mathfrak{P}$-primario si $Ass\,({}^{R}\!/\!{}_{J}) = \{\mathfrak{P}\}$.

5. Con la notación del ejercicio 4. Demuestra que $\mathfrak{P}^{(n)} = \mathfrak{P}^n$ si y sólo si $\mathfrak{P}^n$ es $\mathfrak{P}$-primario.

6. Sean R un anillo noetheriano y M un R-módulo finitamente generado. Demuestra que los ideales mínimos en
$$Supp(M) \subseteq Spec(R)$$
son un conjunto finito, donde $Supp(M) = \{\mathfrak{P} \in Spec(R) \mid M_{\mathfrak{P}} \neq 0\}$.