Examen General de Conocimientos: Álgebra Moderna.
Semestre 2020-II.
27 de julio de 2020.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un **máximo de 3.5 horas**. Escoge y resuelve solamente 3 ejercicios de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. Si se resuelven más de 3 ejercicios en cada sección, se calificarán los 3 primeros. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Enuncia el Teorema de Cauchy y demuéstralo suponiendo que el grupo G es no abeliano.

2. Sea G un grupo finito de orden p^2 con p primo. Demuestra que o bien G es cíclico o G es isomorfo a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

3. Demuestra que no hay grupos simples de orden $n = pqr$, donde p, q y r son números primos distintos.

4. $a)$ Demuestra que todo p-grupo finito es soluble.
   $b)$ Demuestra que S_4 es un grupo soluble pero que si $n \geq 5$ entonces S_n no es un grupo soluble.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Demuestra que todo dominio entero finito es un campo.

2. Considera $\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right] := \left\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ y una "norma" N definida como $N(x) := |a^2 - 5b^2|$, donde $x = a + b\sqrt{5}$. Demuestra que:
   $a)$ Si x no es cero y no es unidad, entonces $N(x) \geq 4$;
   $b)$ x es irreducible si $4 \leq N(x) < 16$;
   $c)$ 4 se factoriza como producto de irreducibles, pero no de manera única.
   Concluye que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$ no es un dominio de factorización única.

3. Sean $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ y E su campo de descomposición. Demuestra que el grupo de Galois de E sobre $\mathbb{Q}$ es un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

4. Sean $K \leq L \leq E$ extensiones de campo y suponga que E/K y L/K son extensiones de Galois. Demuestra que $Gal\,(E/L)$ es un subgrupo normal de $Gal\,(E/K)$ y que

$$Gal\,(L/K) \cong {}^{Gal(E/K)}\!/_{Gal(E/L)}.$$