Examen General de Conocimientos: Álgebra Moderna.
Semestre 2021-I.
15 de febrero de 2021.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un **máximo de 3.5 horas**. Escoge y resuelve solamente 3 ejercicios de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. Si se resuelven más de 3 ejercicios en cada sección, se calificarán los 3 primeros. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Demuestra que dos grupos cíclicos son isomorfos si y sólo si tienen el mismo número de elementos.

2. Sea G un grupo finito tal que $\mid G \mid = pm$, con p primo y $mcd(p,m) = 1$. Sea $\mu_p(G)$ el número de p-subgrupos de Sylow en G. Demuestra que
$$\mu_p(G)(p-1) = \mid \{g \in G \mid o(g) = p\} \mid .$$

3. Sean G un grupo finito y $p_1, ..., p_k$ los distintos primos positivos que dividen a $\mid G \mid$. Para cada $i \in \{1, ..., k\}$ sea P_i un p_i-subgrupo de Sylow de G tal que P_i es normal en G. Demuestra que la función
$$\varphi : \times_{i=1}^{k} P_i \longrightarrow G$$
dada por $\varphi\left((y_1, ..., y_k)\right) = y_1 y_2 ... y_k$ es un isomorfismo de grupos.

4. Recuerda que se define inductivamente la serie derivada de un grupo G como:
$$G^{(0)} := G,\ G^{(1)} := [G,G]\ y\ G^{(i+1)} := \left[G^{(i)}, G^{(i)}\right].$$
Demuestra que G es soluble si y sólo si existe un natural n tal que $G^{(n)} = \{1\}$.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Demuestra que:
a) Si p es un elemento primo en un dominio de integridad D, entonces

p es un elemento irreducible.
b) Si p es un elemento irreducible en un dominio de factorización única D, entonces p es un elemento primo.

2. Sea K un campo y D un dominio de integridad tal que $K \leq D$. Demuestra que para cada $t \in D$, el anillo $K[t]$ es un dominio de ideales principales.

3. Demuestra que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$ y encuentra el grado de la extensión $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right) : \mathbb{Q}\right]$.

4. a) Encuentra un campo de descomposición $E_{|\mathbb{Q}}$ del polinomio $x^3 - 2$.
b) Encuentra el grado de la extensión $[E : \mathbb{Q}]$ y su grupo de Galois.