POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis

20 de enero del 2020
Semestre 2020-1

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos, entre ellos por lo menos 6 puntos deberán obtenerse de cada una de las dos áreas.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

Análisis Real

1. (6 puntos) Sea $f \in L^2([0,\infty),\lambda)$ (con $\lambda =$ la medida de Lebesgue). Prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} f\, d\lambda = 0.$$

2. (6 puntos) Recuerda que si $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definimos

$$s = \liminf_{x\to\infty} F(x) = \lim_{A\to\infty} \inf_{x>A} \{F(x)\}.$$

Es cierto (no lo pruebes) que existe una sucesión $(x_n) \to \infty$ tal que $F(x_n) \to s$.

a) Prueba que si $s > 0$, entonces existe $A > 0$ tal que

$$F(x) > s/2 \text{ para toda } x > A.$$

b) Usa lo anterior para probar que si una función f es Lebesgue integrable en $[0,\infty)$ entonces

$$\liminf_{x\to\infty} x|f(x)| = 0,$$

y por consiguiente existe $(x_n) \to \infty$ tal que $x_n f(x_n) \to 0$.

3. (6 puntos) Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $(Y, \mathcal{G})$ un espacio medible y $T : X \to Y$ una función medible. Para cada $A \subseteq Y$ denotamos a la imagen inversa de A bajo T como $T^{[-1]}(A) := \{x \in X \,|\, T(x) \in A\}$. Define

$$(\mu \circ T^{[-1]}) : \mathcal{G} \to [0,\infty], \text{ tal que } (\mu \circ T^{[-1]})(A) = \mu(T^{[-1]}(A)) \text{ para toda } A \in \mathcal{G}.$$

a) Demuestra que $(\mu \circ T^{[-1]})$ es una medida en $(Y, \mathcal{G})$, llamada **la medida imagen bajo** T.

b) Sea $f : Y \to \mathbb{R}$ tal que $f(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{B_i}(y)$, donde n es un entero positivo, $\{a_i\}_{i=1}^{n} \subset [0, \infty)$ son número distintos y $\{B_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{G}$ es una partición medible de Y, es decir los conjuntos B_i no son vacios, son disjuntos y $\cup_{i=1}^{n} B_i = Y$. Aquí 1_{B_i} es la función indicadora o característica de B_i.

Demuestra que f es una función medible de $(Y, \mathcal{G})$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, (donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ denota los Borelianos) y demuestra que

$$\int_Y f d(\mu \circ T^{[-1]}) = \int_X (f \circ T) d\mu.$$

4. (6 puntos) Sea X un conjunto no numerable y denota $\mathcal{A} := \{\, \{x\} \mid x \in X\}$.

a) Encuentra $\mathcal{F}(\mathcal{A})$, la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$.

b) Define $\mu : \mathcal{F}(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$ mediante:

$$\mu(B) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad B \text{ es a lo más numerable} \\ 1 & \text{si} \quad B^c \text{ es a lo más numerable,} \end{cases}$$

(donde B^c denota al complemento de B). Demuestra que μ es una medida en $(X, \mathcal{F}(\mathcal{A}))$.

Análisis Complejo

1. (6 puntos) Supon que $f(z)$ es una función entera tal que su parte real, $\Re(f)$, es un polinomio. Prueba que entonces f es un polinomio.

2. (6 puntos) Si $f(z)$ es una función holomorfa en el disco $D(0,1)$ (con centro cero y radio 1) y $f(0) = 0$, prueba que

$$f(z) + f(z^2) + \cdots + f(z^n) + \cdots$$

converge para $|z| < 1$ y es también una función homolorfa en $D(0,1)$.

3. (6 puntos) Prueba que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

converge para $\Re(z) > 1$ y representa su derivada de la misma manera.

4. (6 puntos) Sean $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ y B una bola en $\mathbb{C}$ que contiene k ceros de p contados con multiplicidad. Si $p(z) \neq 0$ en ∂B, demuestre que existe $\epsilon > 0$ tal que si $|a_j - b_j| < \epsilon$ para cada $j = 0, \ldots, n-1$ entonces el polinomio $z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_0$ tiene k ceros en B contados con multiplicidad.