POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis

28 de julio del 2020
Semestre 2020-2

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos, entre ellos por lo menos 6 puntos deberán obtenerse de cada una de las dos áreas.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

Análisis Real

1. (6 puntos) Sea (X, Σ, μ) un espacio con medida positiva tal que $\mu(X) = 1$. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función Σ-medible. Define $\varphi : (0, \infty) \to [0, \infty]$ por

$$\varphi(p) = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Hacemos notar que φ puede tomar el valor ∞. Demuestra que φ es una función no decreciente.

2. (6 puntos) Sea $0 < r < 1$ un número real. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que para toda $x \in \mathbb{R}$,

$$F((-\infty, x]) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \pi \\ \sum_{k=1}^{j} r^k = \frac{r - r^{j+1}}{1-r} & \text{si} \quad j \cdot \pi \leq x < (j+1) \cdot \pi \ \text{ y } \ j \geq 1. \end{cases}$$

Sea μ la medida de Lebesgue Stieltjes generada por F, tal que

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a) \quad \text{para cada} \quad -\infty < a \leq b < \infty.$$

(a) Calcula $\mu((-\infty, 10])$.
(b) Calcula $\mu((5, 10])$.
(c) Calcula $\mu(\mathbb{I})$, la medida de los irracionales.
(d) Calcula $\mu(\mathbb{Q})$ la medida de los racionales.
(e) Evalua $\int_{\mathbb{R}} G d\mu$, donde $G(x) = \text{sen}(x)$.

3. (6 puntos) Sea $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue. Para $y \in \mathbb{R}$ sea

$$\gamma(y) = \|f(\cdot) - f(\cdot - y)\|_p$$

   (a) Prueba que γ es continua en $\mathbb{R}$. Puedes usar que el espacio $C_c(\mathbb{R})$, de funciones continuas con soporte compacto, es denso en $L_p(\mathbb{R})$.

   (b) Muestra que el resultado no vale en $L_\infty(\mathbb{R})$.

4. (6 puntos) Sea f la función de Dirichlet restringida a $[0,1]$, es decir,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \cap [0,1], \end{cases}$$

donde $\mathbb{Q}$ es el conjunto de la números racionales e $\mathbb{I}$ es el conjunto de números irracionales.

   (a) Demuestra, usando la definición de la integral de Riemann con supremos e ínfimos, que f no es Riemann integrable.

   (b) Encontrar la integral de f con respecto a λ la medida de Lebesgue en $([0,1], \mathbb{B}_{[0,1]}, \lambda)$, donde $\mathbb{B}_{[0,1]}$ es el σ-álgebra de Borel en el intervalo $[0,1]$.

Análisis Complejo

1. (6 puntos) Muestra que si la función $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}^\times$ es continua en $\overline{\mathbb{D}}$, holomorfa en $\mathbb{D}$ y cumple que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$, entonces f es constante.

   Nota. Recordamos que $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$ y $\mathbb{C}^\times = \{z \in \mathbb{C}\,;\, z \neq 0\}$.

2. (6 puntos) Muestra que para todo polinomio $p(z)$ existe un punto z_0 con $|z_0| = 1$ tal que $\left|p(z_0) - \frac{1}{z_0}\right| \geq 1$.

3. (6 puntos) Considera la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z\overline{z} - \frac{\overline{z}}{2} + \frac{z}{2} - 1$.

   (a) Encuentra $M = \max\{|f(z)| \,:\, |z| = 1\}$ y $m = \min\{|f(z)| \,:\, |z| = 1\}$.

   (b) ¿Existe un punto z_0 con $|z_0| < 1$ y $|f(z_0)| = M$?

   (c) ¿Existe un punto z_0 con $|z_0| < 1$ y $|f(z_0)| = m$?

   (d) ¿Hay alguna contradicción con el principio del módulo máximo?.

4. (6 puntos) Muestra que la serie

$$1+\frac{z}{1+z}+(\frac{z}{1+z})^2+\cdots+(\frac{z}{1+z})^n+\cdots$$

es convergente para todos los números complejos z tales $Re z > \frac{-1}{2}$. Encuentre el valor de la suma de la serie.