POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis

de septiembre del 2020
Semestre 2020-2

Puntos: 48   Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos, entre ellos por lo menos 6 puntos deberán obtenerse de cada una de las dos áreas.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

Análisis Real

1. Sean $p \in [0, \infty)$ y $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ fijas (donde $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ denota la sigma álgebra de los Lebesgue medibles de $\mathbb{R}$ y λ la medida de Lebesgue).

   Para $t \in \mathbb{R}$ define $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_t(x) = f(t + x)$. Prueba:

   (a) $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R})$;

   (b) $\lim_{t\to 0} \|f_t - f\|_p = 0$;

   (c) la función $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{L}_p(\mathbb{R})$ dada por $\phi(t) := f_t$, es uniformemente continua.

2. (6 puntos) Sea $(g_n : [0, 1] \to \mathbb{R})_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones borel medibles en $[0, 1]$ que satisfacen

   (I) existe $C > 0$ tal que para toda $n \geq 1$, $|g_n(x)| \leq C$, casi dondequiera relativa a λ (la medida de Lebesgue en $[0, 1]$);

   (II) para toda $a \in [0, 1]$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^a g d\lambda = 0$.

   Prueba que para toda $f \in L^1([0, 1], \lambda)$ se cumple

   $$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f g_n d\lambda = 0.$$

3. (6 puntos) Prueba que si $f_n, g_n \to 0$ en medida entonces también $f_n g_n$ converge a cero en medida.

   Sugerencia: Recuerda que $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ y que

   $$\{x : (\varphi + \psi)(x) > \lambda\} \subset \{x : \varphi(x) > \lambda/2\} \cup \{x : \psi(x) > \lambda/2\}$$

   para $\varphi, \psi \geq 0$ y $\lambda > 0$.

4. (6 puntos) Sea $X = \{a, b, c\}$, con la $\sigma-$álgebra $\mathcal{M}$ que consiste en X, ϕ, $\{a, b\}$, $\{c\}$. Define la medida en $\mathcal{M}$: $\mu(X) = \infty = \mu(\{a, b\})$, $\mu(\{c\}) = 1$ y $\mu(\phi) = 0$.

   (a) Prueba que si $f : X \to [0, \infty]$ es medible entonces $f(a) = f(b)$ y concluye que ésta es una condicion necesaria y suficiente. ¿Cuándo es esa función integrable?

   (b) Sea ν la medida que cuenta en $\mathcal{M}$. Prueba que $\mu \ll \nu$ pero no existe $f \in L^1(\nu)$ tal que
   $$\mu(A) = \int_A f d\nu.$$
   ¿Contradice esto el Teorema de Radon-Nikodým?

Análisis Complejo

1. (6 puntos) Para $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada de clase C^1, se define el índice de γ alrededor de $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ como:
   $$ind(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - w}$$

   (a) Prueba que si γ no pasa por $z = 0$, entonces
   $$ind(\frac{1}{\gamma}, 0) = -ind(\gamma, 0).$$

   (b) Prueba que si γ no pasa por los 3 puntos 0, w, $\frac{1}{w}$ entonces
   $$ind(\gamma, \frac{1}{w}) - ind(\frac{1}{\gamma}, w) = ind(\gamma, 0).$$

2. (6 puntos) Sea $f : G \to \mathbb{C}$ una función holomorfa definida en una región (abierto y conexo) G que contiene al disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}_R = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leq R\}$, con $R > 0$ y que cumple $|\mathrm{Im}(z)|\,|f(z)| \leq 1$ para $|z| = R$.

   Prueba que:

   (a) $|(z^2 - R^2)f(z)| \leq 2R$ para $|z| = R$;

   (b) $|f(z)| \leq \frac{8}{3R}$ para $|z| \leq \frac{R}{2}$.

3. (6 puntos) Considera la función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definida por
   $$f(z) = \int_0^1 \frac{1}{1 - tz} dt,$$
   donde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

   (a) Prueba que f es holomorfa en $\mathbb{D}$.

   (b) Encuentra la serie de Taylor de la función anterior f alrededor del 0.

4. (6 puntos) Para cada número natural n, considere a γ_n la parametrización de la circunferencia de centro en 0 y radio n, recorrida en sentido positivo una vez. Prueba que no existe un polinomio $p(z)$ tal que para todo $n = 1, 2, 3, ...$

$$\int_{\gamma_n} \frac{1}{p(z)} dz \neq \int_{\gamma_{n+1}} \frac{1}{p(z)}.$$