POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis

enero del 2021
Semestre 2021-1

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos, entre ellos por lo menos 6 puntos deberán obtenerse de cada una de las dos áreas.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

Análisis Real

1. (6 puntos) Sea $\mathcal{C}$ el conjunto ternario de Cantor y λ la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Prueba las siguientes afirmaciones:

   a) $\mathcal{C}$ tiene medida cero.

   b) Considera el subconjunto $\mathcal{F} \subset [0,1]$ construido como $\mathcal{C}$ excepto que cada uno de los intervalos removidos en el n-ésimo paso tiene longitud $\alpha 3^{-n}$, con $0 < \alpha < 1$. Entonces $\mathcal{F}$ es cerrado, su complemento es denso en $[0,1]$ y $\lambda(F) = 1 - \alpha$.

2. (6 puntos) Prueba que $(L^\infty([0,1],\lambda), \|\cdot\|_\infty)$, es completo.

3. (6 puntos) Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua y creciente con $g(a) = c, g(b) = d$ y sea $H = \{x \in [a,b] : g'(x) \neq 0\}$.

   Prueba que si $E \subset [c,d]$ es medible, entonces $F := g^{-1}(E) \cap H$ es medible y $\lambda(E) = \int_F g'$.

4. (6 puntos) Prueba que existe una sucesión de funciones no negativas en $L^1(\mathbb{R},\lambda)$ que satisfacen:

   a) $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0$,

   b) para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se tiene $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$.

   Sin embargo, prueba que existe una subsucesión, $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$, tal que $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = 0$, para casi toda $x \in \mathbb{R}$.

Análisis Complejo

1. (6 puntos) ¿Cuál es el número $r > 0$ más grande para el cual existen constantes $c_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, tales que
$$\frac{(z^2+\pi^2)(e^z-1)}{\sinh(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$
para $|z| < r$?

2. (6 puntos) Muestra que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función entera que cumple
$$\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = \infty$$
siempre que un sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ staisfaga $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, entonces f es un polinomio.

3. (6 puntos) Sean $f : G \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto y conexo G que contiene al conjunto $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \geq 1\}$, y que además satisface $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Muestra que para $|z| > 2$, se cumple que,
$$f(z) = -\int_{|w|=2} \frac{f(w)}{(w-z)} dw.$$

4. (6 puntos) Considera el disco abierto $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa salvo en un punto $a \in \mathbb{D}$, que es un polo de orden m. Además supon que f tiene un único cero en $b \in \mathbb{D}$ de orden n.

   Sea $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa.

   Encuentra la integral,
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f'(w)}{f(w)} g(w) dw,$$
   donde γ es una curva cerrada simple en $\mathbb{D}$ que encierra tanto a a como a b.