

Examen de Conocimientos Generales

Análisis Numérico

Semestre 2020-1

Lunes 13 de enero 2019
Horario : 11:00 a 15:00 hrs

Lugar: Laboratorio de Cómputo Científico cub. 240, 2do piso Depto. de Matemáticas.

Instrucciones: Resuelva todos los ejercicios.

Calificación: Suma de puntos dividida por 3.

1 (6 puntos) Considere el sistema de punto flotante $fl(10, 4, -15, 17)$

a) Usando truncamiento, halle el elemento más grande que cumple la ecuación

$$x \oplus 30 = 30$$

b) Convierta el número binario $(11111000111)_2$ a un elemento normalizado del sistema.

c) Intente predecir cuándo la suma parcial

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

deja de cambiar en el sistema de punto flotante dado.

2 (4 puntos) Factorización de Cholesky.

a) Sea $v \in \mathbb{R}^3$, y sea

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Pruebe que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} B & v \\ v^T & 1 \end{bmatrix}$$

es positiva definida.

b) Suponga que la matriz $C = B - vv^T$ es positiva definida. Halle la factorización de Cholesky de A para cada $v \in \mathbb{R}^3$.

3 (6 puntos) Halle la parábola

$$y = a_0 + a_1t + a_2t^2$$

que ajusta por mínimos cuadrados a los datos de la tabla.

t_i	y_i
0	100
1	118
2	92
3	48
3.5	7

4 (5 puntos) Regla de cuadratura.

- Calcule una regla de cuadratura gaussiana de 3 puntos en el intervalo $[-2, 2]$.
- Use la regla de cuadratura obtenida para aproximar

$$\int_{-2}^2 x \cos(x) \, dx.$$

5 (4 puntos) Calcule un *Spline* cuadrático $s(P, 2)$ continuamente diferenciable en la partición $P := \{-2, 0, 1, 6\}$ del intervalo $[-2, 6]$ tal que

$$s(-2) = s'(-2) = 0,$$

$$s(6) = s'(6) = 0.$$

6 (5 puntos) Sea $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$.

- Pruebe que g tiene al menos un punto fijo en $[a, b]$.
- Suponga además que g es diferenciable sobre (a, b) y que existe una constante positiva $k < 1$ tal que

$$|g'(x)| \leq k \quad \forall x \in (a, b).$$

Pruebe que g tiene un único punto fijo sobre $[a, b]$.