Examen de Conocimientos Generales
Análisis Numérico

Semestre 2020-2

27 de Julio 2020
Horario : 11:00 a 15:00 hrs

Lugar: Laboratorio de Cómputo Científico cub. 240, 2do piso Depto. de Matemáticas.
Instrucciones: Resuelva todos los ejercicios.
Calificación: Suma de puntos dividida por 3.

1 (6 puntos) Denotamos por $fl(\beta, p, L, U)$ al sistema de números flotantes en base β con precisión p y rango de exponente en $[-L, U]$.

a) Usando truncamiento, halle el elemento positivo más pequeño del sistema de punto flotante $fl(10, 4, -9, 9)$ que cumple la ecuación

$$x \oplus \text{float}(\pi) = x.$$

b) Halle cuántos números flotantes del sistema $fl(10, 5, -5, 7)$ son mayores que 1000.

c) Justifique pór que $\frac{1}{5}$ no puede representarse exactamente en un sistema binario de precisión finita.

2 (4 puntos) Álgebra Lineal Numérica

a) Sea H una matriz de Householder $n \times n$. Pruebe que

$$\widehat{H} = \begin{bmatrix} I_{m\times m} & O_{m\times n} \\ O_{n\times m} & H \end{bmatrix}$$

es una matriz de Householder.

b) Considere las rectas

$$0.641x + 0.242y = 0.883,$$
$$0.321x + 0.121y = 0.442.$$

Halle el punto de intersección usando precisión de tres dígitos con redondeo al más cercano y compárelo con la solución exacta.

De una interpretación geométrica de la sensibilidad del sistema.

$\boxed{3}$ (6 puntos) Problema de Cuadrados Mínimos

Dados los puntos $P_i = (x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, n$, queremos calcular los valores de los parámetros $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ de la recta

$$\ell : \quad y = \beta_0 + \beta_1 x$$

de modo que la suma de los cuadrados de las distancias ortogonales de los puntos $P_i's$ a la recta ℓ sea mínima.

a) Halle una expresión para la función objetivo $f(\boldsymbol{\beta})$ en términos del residual

$$r(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{y} - \beta_0 \mathbf{1} - \beta_1 \boldsymbol{x},$$

donde $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0\ \beta_1]^T$, $\mathbf{1}$ es vector de unos, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son vectores con elementos $x_i's$ e $y_i's$, respectivamente.

b) Pruebe que los valores óptimos de los parámetros β_0 y β_1 satisfacen la ecuación

$$\beta_0 = \text{Promedio}(y_i's) - \beta_1 \text{Promedio}(x_i's)$$

c) Calcule los valores óptimos de los parámetros β_0 y β_1 de la recta ℓ que ajusta los puntos $P_1 = (-3, 1), P_2 = (-1, 1)$ y $P_3 = (1, 5)$ con la distancia ortogonal y compare su resultado con la solución de la regresión lineal correspondiente.

$\boxed{4}$ (5 puntos) Sea f una función diferenciable sobre el intervalo finito $[a, b]$. Determine los pesos w_i de la regla de cuadratura

$$\int_a^b f(x)dx \approx w_0 f(a) + w_1 f(b) + w_2 f'(a) + w_3 f'(b)$$

de modo que sea exacta para polinomios del grado más alto posible.

$\boxed{5}$ (4 puntos) Construya un spline cúbico s que pase por los puntos $(1, 2), (2, 3)$ y $(3, 5)$ tal que $s'(1) = 2$ y $s'(3) = 1$.

$\boxed{6}$ (5 puntos) Sea f una función de valores reales definida sobre un intervalo cerrado I tal que $f(I) \subset I$. Supónga que existe una constante $L \in [0, 1)$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in I.$$

a) Dado $x_0 \in I$, pruebe que la sucesión $x_{n+1} = f(x_n)$ converge

b) Pruebe que el límite x_* de la sucesión $\{x_n\}$ es punto fijo de f.

c) Supónga además que f es una función tres veces diferenciable sobre I tal que $f'(x_*) = 0$ y $f''(x_*) \neq 0$. Pruebe que la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ es cuadrática.