Examen de Conocimientos Generales

Análisis Numérico

Semestre 2020-2

Septiembre 2020
Horario: 11:00 a 15:00 hrs

Instrucciones: Resuelva todos los ejercicios.

Calificación: Suma de puntos dividida por 3. Requiere al menos 18 puntos para aprobar.

$\boxed{\mathbf{1}}$ (4 puntos) Pruebe el Teorema de Punto Fijo para transformaciones lineales:
Sea A una matriz real de tamaño $n \times n$ tal que $\|A\| < 1$. Entonces existe un único punto $\boldsymbol{x}_* \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{x}_*$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (4 puntos) Calcule un *Spline* Cúbico de Hermite $s(x)$, que sea continuamente diferenciable en la partición $\{1, 2, 4\}$ del intervalo $[1, 4]$, y tal que

$$s(1) = 1;\ s'(1) = -1;$$
$$s(2) = 0;\ s'(2) = 0;$$
$$s(4) = 4;\ s'(4) = 0.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (5 puntos) Sea f una función diferenciable de valores reales sobre el intervalo $[-1, 1]$. Considere la regla de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_1 f\left(-\frac{1}{2}\right) + w_2 f\left(\frac{1}{2}\right) + w_3 f'(1).$$

a) Determine los pesos w_1, w_2 y w_3 de modo que la regla de cuadratura dada sea exacta para polinomios de grado a lo más 2.

b) Use la regla de cuadratura dada con un cambio de variable adecuado para aproximar

$$\int_{0}^{1/2} x^3 dx.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (5 puntos) Queremos ajustar una circunferencia C a cuatro puntos $P_1 = (1,4)$, $P_2 = (3,2), P_3 = (1,0)$ y $P_4 = (-1,3)$ en el sentido de mínimos cuadrados.

a) Use la ecuación general de una circunferencia para probar que las condiciones $P_i \in C,\ i = 1,2,3,4$ se pueden escribir como el sistema de ecuaciones lineales

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{u}} \quad = \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 17 \\ 13 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{b}}.$$

La circunferencia C depende de las componentes u_1, u_2 y u_3.

b) Resuelva las ecuaciones normales del sistema de ecuaciones lineales $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$.

c) Halle el centro y el radio de la circunferencia C con la solución del inciso (b).

$\boxed{\mathbf{5}}$ (6 puntos) Sea A una matriz real invertible de tamaño 2×2 con número de condición $\kappa_2(A)$ en norma-2.

a) La imagen del círculo unitario bajo A es una elipse $\mathcal{E}$ con semieje mayor de longitud M y semieje menor de longitud m. Pruebe que $\kappa_2(A) = M/m$.

b) Sea $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$. Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ la solución del sistema de ecuaciones lineales $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Sea $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^2$ la solución del sistema de ecuaciones lineales perturbado $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{e}$. Pruebe que

$$\frac{m\|\boldsymbol{e}\|_2}{M\|\boldsymbol{b}\|_2} \leq \frac{\|\boldsymbol{x} - \widetilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \frac{M\|\boldsymbol{e}\|_2}{m\|\boldsymbol{b}\|_2}.$$

c) De una interpretación geométrica de la sensibilidad de $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ usando la elipse $\mathcal{E}$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ (6 puntos) Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $|f|$ y $|f''|$ están acotadas por una constante $M > 0$. La derivada de f en un punto dado se aproxima por el cociente de Newton con un incremento $h \approx 0$. Deseamos hallar un valor adecuado de h para que la aproximación sea precisa.

Sean $E_t(h)$ y $E_r(h)$ los errores de truncamiento y redondeo en la aproximación de $f'(1)$, respectivamente. Cuando h se aproxima a cero, $E_t(h)$ disminuye, mientras que $E_r(h)$ aumenta (Fig. 1). Para balancear esto escogemos h como el mínimo del error total

$$E(h) = E_t(h) + E_r(h).$$

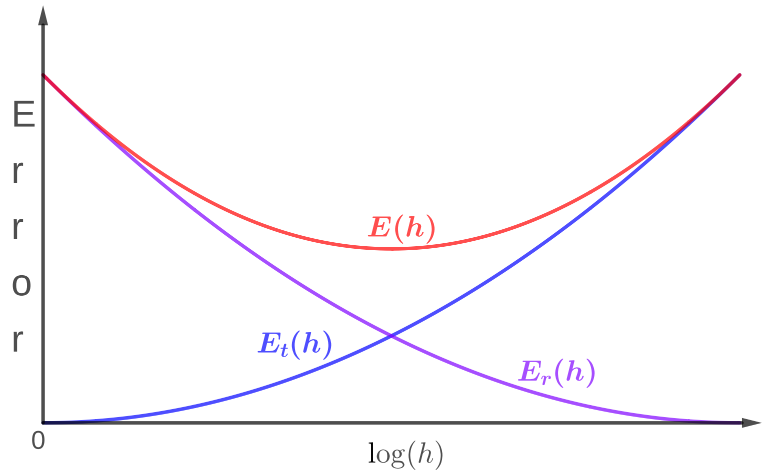

Figura 1: Gráficas en escala logarítmica del error de truncamiento $E_t(h)$, el error de redondeo $E_r(h)$, y el error total $E(h)$.

a) Pruebe que el error de truncamiento

$$E_t(h) = f'(1) - \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

satisface la cota

$$|E_t(h)| \leq \frac{Mh}{2}.$$

b) Considere un sistema de punto flotante con unidad de redondeo ϵ. Supónga que $f(1+h) \approx f(1)$ cuando $h \approx 0$. Pruebe que el error de redondeo

$$E_r(h) = \frac{\text{float}(f(1+h)) - \text{float}(f(1))}{h}$$

satisface la cota

$$|E_r(h)| \leq \frac{2M\epsilon}{h}.$$

c) Encuentre

$$h_* = \arg\min_h \left(\frac{Mh}{2} + \frac{2M\epsilon}{h}\right).$$