Examen de Conocimientos Generales
Análisis Numérico
Semestre 2021-2

Febrero 2021

Instrucciones: Resuelva todos los ejercicios explicando con detalle su procedimiento.
Calificación: Suma de puntos dividida por 3. Requiere al menos 18 puntos para aprobar.
Duración: 4 horas.

$\boxed{\mathbf{1}}$ (4 puntos) Sea I un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, y sea $f : I \to I$ una función continua. Pruebe que f tiene un punto fijo en I.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (4 puntos) Encuentre el *spline* cúbico $s \in C^2[0,2]$ en la partición $\{0,1,2\}$ del intervalo $[0,2]$ tal que:

$$\begin{aligned} s(0) &= 2, \quad & s(1) &= 1, \quad & s(2) &= 4, \\ s'(0) &= 1, \quad & s'(2) &= 13. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (4 puntos) Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ distintos. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. La primera diferencia dividida de f respecto a x_1 y x_2 se define por:

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

La segunda diferencia dividida de f respecto a x_1, x_2 y x_3 se define por:

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}.$$

Pruebe la siguiente identidad:

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}}.$$

Sugerencia: Exprese el denominador del lado derecho como producto de factores lineales.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (4 puntos) Sea $h > 0$. Sea $f \in C^2[0,h]$. Determine pesos w_0, w_1, w_2 y w_3 de modo que la regla de cuadratura:

$$\int_0^h f(x)dx \approx w_0 f(0) + w_1 f(h) + w_2 f''(0) + w_3 f''(h),$$

sea exacta para polinomios de hasta grado tres.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (4 puntos) Sean $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ vectores distintos de $\mathbb{R}^n$ tales que $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{y}\|_2$. Denote por I_n a la matriz identidad $n \times n$ y $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$. Pruebe que la matriz:

$$H = I_n - 2\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^t}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{v}},$$

satisface la ecuación $H\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ y dé una interpretación geométrica de este resultado en $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Sean $\alpha > 0$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ y B una matriz real simétrica $n \times n$ tal que la matriz:

$$C = B - \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^t}{\alpha},$$

es positiva definida.

a) (3 puntos) Pruebe que la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \boldsymbol{v}^t \\ \boldsymbol{v} & B \end{bmatrix},$$

es positiva definida.

b) (3 puntos) Hallar una factorización de Cholesky de A a partir de una factorización de Cholesky de C.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Aritmética de Punto Flotante.

a) (2 puntos) Considere la sucesión:

$$\begin{aligned} S_0 &= 1, \\ S_{n+1} &= S_n \oplus \frac{1}{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

en un sistema decimal de tres cifras significativas, donde la suma usa truncamiento. Determine el entero positivo n más pequeño tal que $S_{n+1} = S_n$.

b) (2 puntos) Hallar el número flotante que aproxima 125 en un sistema binario de precisión cinco usando truncamiento.