Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Examen General 2020 I
Duración: parte teórica: 3 hrs,
plazo para entrega de parte práctica: miercoles 17 de enero 20:00hrs
Criterio de evaluación: ambas partes aprobadas.

Parte 1. (Teórica: hacer 4 de 5)

1. Sea $\eta(z,w) = \rho(z) - z\sigma(w)$, donde ρ y σ son los polinomios característicos de un método lineal multipaso. Demuestre que el método es de orden p si y solo si:
$$\eta(z, e^z) = cz^{p+1} + O(z^{p+2}) \text{ cuando } z \to 0$$
Encuentre el orden del método y su constante de error
$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = h\left(2f_{n+2} - 3f_{n+1} + f_n\right)$$
Analice si es convergente.

2. Para la solución numérica del problema
$$y' = -1000(y - \cos t),\ y(0) = 0,\ 0 \leq \text{t} \leq 5,$$
considere la utilización de los siguientes métodos con $y_0 = 1$, y $y_1 = y(h)$ (ie utilizando la solución exacta en el primer paso)
   (a) El método de punto medio
   $$y_n = y_{n-1} + 2hf_{n-1}$$
   (b) Adams-Bashfoth
   $$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2}(3f_{n-1} - f_{n-2})$$
   (c) BDF
   $$y_n = \frac{(4y_{n-1} - y_{n-2})}{3} + \frac{2h}{3}f_n$$
   Analice la calidad esperada de los resultados que se obtendrían en cada uno de los casos.

3. El predictor P y el corrector C están definidos mediante sus polinomios característicos como:
$$\begin{array}{ll} P : \rho * (\varsigma) = \varsigma^4 - 1 & \sigma * (\varsigma) = \frac{4}{3}\left(2\varsigma^3 - \varsigma^2 + 2\varsigma\right) \\ C : \rho(\varsigma) = \varsigma^3 - \frac{9}{8}\varsigma^2 + \frac{1}{8} & \sigma(\varsigma) = \frac{3}{8}\left(\varsigma^3 + 2\varsigma^2 - \varsigma\right) \end{array}$$

(a) Demuestre que para esta pareja es posible aplicar la estimacion del error de Milne para la pareja (P,C) (ver anexo 1)

(b) Describa el método PECE utilizando tales esquemas

(c) ¿De que orden sería el PECE y cuál su constante de errror?

(d) Describa la implementación del predictor corrector con extrapolacion L en la forma PECLE.

4. Describa qué son y como se utilizan las parejas de métodos Runge-Kutta para la estimación del error.

   En el caso del siguiente ejemplo de método encajado (embended)

$$\begin{array}{cccc}
0 & & & \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \\
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}
\end{array}$$

   (a) Determine el orden de cada uno de los participantes.

   (b) A que es igual la estimación del error

   (c) Demuestre que el método implícito es A-estable.

Parte 2 (práctica: hacer 5 de 6)

1. Aplique el esquema del problema 1 de la primera parte a la ecuación $y' = 0$ con condiciones de inicio perturbadas $\mathrm{x}_0 = 0, x_1 = \epsilon = 0.01$, con pasos $h = 0.1, 0.05, 0.025$.Explique los resultados.

2. Confirme sus predicciones del ejercicio 2 de la primera parte realizando los cálculos.

3. El problema

$$y' = -10(y-1)^2,\ y(0) = 2$$

tiene solución exacta $y(t) = (2 + 10x)/(1 + 10x)$.

Usando los esquemas del problema 3 de la primera parte, calcule la solución numérica que se obtiene en $0 \leq x \leq 0.2$, utilizando valores de inicio exactos y paso h=0.01:

- En modo "hasta convergencia"
- En modo PECE

Compare en cada caso las estimaciones del error con Milne con el auténtico error de truncamiento local que puede obtenerse en cada punto gracias a que se conoce la solución exacta y esto permite aplicar la hipótesis de localización

5. Encuentre la región de estabilidad del método

$$y_{n+2} - y_n = \frac{1}{2}h\left[f_{n+1} + 3f_n\right]$$

6. a. Grafique mediante "escaneo" la región de estabilidad absoluta del RK explícito

$$\begin{array}{cccc}
0 & & & \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \\
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}
\end{array}$$

b. Aplique ese método para resolver el problema $y\prime = Ay$, $y(0) = [1, 0, -1]^T$, en el intervalo [0,1], donde

$$A = \begin{bmatrix} -21 & 19 & -20 \\ 19 & -21 & 20 \\ 40 & -40 & -40 \end{bmatrix}$$

usando dos tamaños de paso constantes, uno para el $\widehat{h}$ esté dentro de la región de estabilidad y oro para el que esté fuera.