

Enero de 2020.

Curso: Métodos numéricos para la solución de EDP.

Posgrado en Ciencias Matemáticas de la UNAM. Examen general.
Tiempo para hacer el examen: tres horas.

Resuelva tres de los siguientes cuatro problemas:

Problema 1. Demuestre el siguiente teorema:

Teorema.- Un esquema monótono, dado por (1), que es conservativo, es TVD.

Notación. Denote un esquema explícito en diferencias como:

$$u_j^{n+1} = G(u_{j-q}^n, \dots, u_{j+p+1}^n) \quad (1)$$

Con esta notación recuerde que un esquema monótono se define como:

Definición.- El esquema (1) es monótono si la función G es una función creciente en sus argumentos, i.e.,

$$\frac{\partial G(u_{-q}, \dots, u_{p+1})}{\partial u_i} \geq 0 \quad -q \leq i \leq p+1$$

Note que asumimos que G es diferenciable.

Problema 2. Resuelva los problemas planteados en los siguientes dos incisos:

2.1.- Obtenga la solución analítica del siguiente problema

$$\partial_t u(x, t) + u \partial_x u(x, t) = 0$$

con condición a la frontera

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 < |x| \\ 1+x & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

2.2.- Describa el método de Godunov y diga como se aplica al problema del inciso anterior, i.e. (2.1).

Problema 3. Considere el método en diferencias de Lax-Wendroff, dado por

$$U_m^{n+1} = U_m^n - \lambda \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2} + \lambda^2 \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{2}. \quad (2)$$

donde $\lambda = \frac{ak}{h}$, $a > 0$. Demostrar que es consistente y estable, encontrar el factor de amplificación.

Problema 4. Ecuaciones modificadas. Encontrar la ecuación modificada del esquema de Lax-Wendroff, (2) y del esquema, (Upwind), dado por:

$$U_m^{n+1} = U_m^n - \lambda(U_m^n - U_{m-1}^n), \quad 0 < m < M. \quad (3)$$

$\lambda = \frac{ak}{h}$, $a > 0$. Explicar rigurosamente que se entiende por esquema difusivo y dispersivo.