**Examen General de Conocimientos:**
**Álgebra Conmutativa.**
**Semestre 2023-II.**
**3 de agosto de 2023.**

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Todos los anillos considerados son conmutativos y con unidad. Además, $k$ es un campo algebraicamente cerrado de característica cero.

1. *a*) Considera una extensión de dominios $A \subset B$. Muestra que $A$ es campo si y solo si $B$ es campo.
   *b*) Si $P$ es un ideal primo de $B$, entonces es maximal si y solo si $P \cap A$ es un ideal maximal de $A$.

2. Considera la curva $X$ definida por $V(y^2 - x^2 - x^3) \subset k^2$. Argumenta que la completación del anillo local en el origen $\hat{\mathfrak{O}}_{X,0}$ es isomorfa a $k\left[[x,y]\right]/(gh)$, donde $g, h \in k\left[[x,y]\right]$.

3. Si $A$ es un anillo Noetheriano, muestra que cualquier homomorfismo suprayectivo $\varphi : A \longrightarrow A$ es también inyectivo.

4. Demuestra el siguiente Teorema (Nullstellensatz débil): Un ideal $I \subset k\left[x_1, ..., x_n\right]$ es propio si y solo si $V(I) \subset k^n$ es no vacío.

5. Considere el ideal $I = \left(xy, z^3\right) \subset R := \mathbb{C}\left[x,y,z\right]$ como un R-módulo.
   *a*) Escribe una presentación del ideal $R^b \longrightarrow R^a \longrightarrow I \longrightarrow 0$.
   *b*) Muestra que la descomposición primaria minimal $I = \left(x, z^3\right) \cap \left(y, z^3\right)$. Concluye que los ideales primos asociados $Ass(I)$ son dos, ¿Cuáles?
   *c*) Muestra que el siguiente conjunto es un $R$-módulo
   $$N := Hom_R\left(I, {}^{R}\!/\!{}_{I}\right) \subset R^2,$$
   y exhibe cuatro homomorfismos $\varphi_i \in N$ independientes sobre R.

6. Considera la sucesión exacta corta de $A$-módulos finitamente generados
   $$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$
   donde $F$ es libre. Si $L$ es un $A$-módulo finitamente generado, entonces la siguiente sucesión es exacta
   $$0 \longrightarrow Hom_A\left(F,L\right) \longrightarrow Hom_A\left(N,L\right) \longrightarrow Hom_A\left(M,L\right) \longrightarrow 0.$$