**Examen General de Conocimientos: Álgebra Moderna.**
**Semestre 2022-I.**
**10 de enero de 2022.**

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un **máximo de 3.5 horas**. Escoge y resuelve solamente 3 ejercicios de Teoría de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. Si se resuelven más de 3 ejercicios en cada sección, se calificarán los 3 primeros. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

### Teoría de Grupos.

1. Demuestra que si $G$ es un grupo finito y $H$ es un subgrupo propio de $G$ tal que el orden de $G$ no divide a $[G : H]!$, entonces $G$ tiene un subgrupo normal no trivial, donde $[G : H]$ denota el índice de $H$ en $G$.

2. Enuncia y demuestra el teorema de Cauchy para grupos finitos.

3. Sean $p < q < r$ números primos y $G$ un grupo de orden $pqr$. Demuestra que un $q$-subgrupo de Sylow o un $r$-subgrupo de Sylow de $G$ es normal, y que $G$ contiene un subgrupo normal de $H$ de orden $qr$.

4. Sean $G$ un grupo, $N$ un subgrupo normal de $G$ y ${}^{G}\!/_{N}$ su grupo cociente. Demuestra que si $N$ y ${}^{G}\!/_{N}$ son grupos solubles, entonces $G$ lo es.

### Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Dados un número primo $p$ y un polinomio $f \in \mathbb{Z}[x]$, consideramos el campo $\mathbb{Z}_p$ de enteros módulo $p$ y definimos $[f]_p \in \mathbb{Z}_p[x]$ como el polinomio que se obtiene de $f$ al tomar la imagen en $\mathbb{Z}_p$ de cada coeficiente de $f$. Demuestra que si $f \in \mathbb{Z}[x]$ es un polinomio mónico de grado positivo para el que existe un número primo $p$ tal que $[f]_p$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p[x]$, entonces $f$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

2. Demuestra que el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[x]$ no es un dominio de ideales principales.

3. Demuestra que el anillo $A = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ no es un dominio de factorización única.

4. Sean $E/F$ una extensión de campos y $\alpha \in E$. Demuestra que $F(\alpha) = F[\alpha]$ si y solo si $dim_F(F[\alpha]) < \infty$.

5. Sea $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Encuentra un campo de descomposición $E$ de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$ y demuestra que $Gal(E/\mathbb{Q}) \cong S_3$.