Examen General de Conocimientos:
Álgebra Conmutativa.
Semestre 2022-I.
10 de enero de 2022.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. Cada uno de los seis ejercicios tiene el mismo valor. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Todos los anillos considerados son conmutativos con unidad.

1. Sea R un anillo noetheriano local y M un R-módulo finitamente generado. Demuestra que si M es un R-módulo plano, entonces M es libre.

2. Sea I un ideal del anillo R tal que $I = rad(I)$. Demuestra que I no tiene ideales primos encajados, es decir, todos los ideales primos en $Ass\left({}^{R}/_{I}\right)$ son mínimos en ${}^{R}/_{I}$.

3. Sean R un anillo y $\mathfrak{P} \in Spec(R)$. La n-potencia simbólica de $\mathfrak{P}$ es el ideal:
$$\mathfrak{P}^{(n)} = (\mathfrak{P}^n R_{\mathfrak{P}}) \cap R.$$
Demuestre que $\mathfrak{P}^{(n)}$ es un ideal $\mathfrak{P}$-primario.
Nota: Un ideal J en R es $\mathfrak{P}$-primario si $Ass\left({}^{R}/_{J}\right) = \{\mathfrak{P}\}$.

4. Con la notación del ejercicio 3. Demuestra que $\mathfrak{P}^n = \mathfrak{P}^{(n)}$ si y solo si $\mathfrak{P}^n$ es $\mathfrak{P}$-primario.

5. Sean R un anillo noetheriano y M un R-módulo finitamente generado. Demuestra que los ideales mínimos en
$$Supp\,(M) \subseteq Spec\,(R)$$
son un conjunto finito, donde $Supp\,(M) = \{\mathfrak{P} \in Spec\,(R) : M_{\mathfrak{P}} \neq 0\}$.

6. Sean R un anillo noetheriano y M un R-módulo finitamente generado. Sea $Ann\,(M) = \{x \in R : xM = 0\}$ el anulador de M y $V\,(Ann\,(M)) = \{\mathfrak{P} \in Spec\,(R) : Ann\,(M) \subseteq \mathfrak{P}\}$ su locus de ceros. Demuestra que
$$Supp\,(M) = V\,(Ann\,(M))\,.$$