Examen General de Conocimientos: Álgebra Moderna.
Semestre 2021-II.
27 de julio de 2021.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un **máximo de 3.5 horas**. Escoge y resuelve solamente 3 ejercicios de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. Si se resuelven más de 3 ejercicios en cada sección, se calificarán los 3 primeros. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Demuestra que si $N \lhd G$ y N, ${}^{G}\!/_{N}$ son ambos p-grupos, entonces G es un p-grupo.

2. Demuestra que G es un grupo abeliano si y sólo si la función $\phi : G \longrightarrow G$ dada por $\phi(g) = g^{-1}$ es un automorfismo.

3. Sea G un grupo de orden 30. Demuestra que:
   i) G tiene un subgrupo de orden 15;
   ii) Si G no es abeliano demuestra que G tiene más de un 2-subgrupo de Sylow.

4. Sean $N \lhd G$ y $K \lhd G$ tales que $N \cap K = Id$ y $N \vee K = G$ donde $N \vee K$ denota la intersección de todos los subgrupos que contienen a $N \cup K$. Demuestra que ${}^{G}\!/_{N} \cong K$.

5. Demuestra que el grupo de permutaciones de cuatro elementos S_4 es un grupo soluble, pero que si $n \geq 5$ entonces S_n no es un grupo soluble.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Demuestra que todo dominio R con un número finito de elementos es un campo.

2. Demuestra que para todo anillo conmutativo R, ${}^{R[x]}\!/_{(x)} \cong R$.

3. Demuestra que el polinomio $x + 1$ es una unidad en el anillo de series de potencias $\mathbb{Z}[[x]]$ pero no es unidad en $\mathbb{Z}[x]$.

4. Construye un campo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^5 - 2$ y encuentra su dimensión sobre $\mathbb{Q}$.

5. Determina los campos intermedios entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$.