Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Examen de Admisión de Álgebra Lineal, Octubre 2020 Código ____________

Instrucciones. Escriba su nombre y un código formado por sus iniciales y fecha de nacimiento (8 dígitos, 4 para el año, 2 para el mes y 2 para el día), en la lista de asistentes a este examen y escriba el código en la esquina de cada una de las hojas de su examen. Escriba una hoja de respuestas y entréguela junto con el resto de su trabajo escribiendo su código en cada página. Tiene dos horas para para trabajar en su examen. Si la hoja de respuestas no está clara y además escrita aparte del trabajo hecho para obtener las respuestas, el examen no será calificado. Comience a escribir las respuestas de su examen al menos 15 minutos antes de la hora límite. Sólo las respuestas contenidas en la hoja de respuestas serán consideradas para la calificación. Favor de no escribir en la tabla de la derecha.

Problema	Max	Puntos
1	50	
2	50	
3	20	
4	20	
5	40	
Total:	180	

Preguntas

1. (10 puntos) Suponga que L y P son dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$ de dimensiones 1 y 2 respectivamente. Considere los productos cartesianos $L \times L$, $P \times L$, y $P \times P$. Cada uno de los productos cartesianos mencionados es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con la suma definida coordenada a coordenada.
   (a) (10 puntos) Note que cada uno de los espacios mencionados arriba es un conjunto de pares ordenados. Use una tabla para describir otra característica en común entre los espacios y al menos dos diferencias (sugerencia: escriba los espacios en filas, las características en columnas).
   (b) (20 puntos) Denote al cero de L como 0 y al cero de P como $\mathbf{0}$. Sean $0 \neq l \in L$ y $0 \neq p \in P$. Explique si el conjunto $\mathcal{B} = \{(\mathbf{0}, l), (p, 0)\} \subset P \times L$ es linealmente independiente, y argumente si es posible generar $P \times L$ a partir de $\mathcal{B}$.
   (c) (10 puntos) Considere $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{R}$ y $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dé una base para el espacio vectorial $L \times P$ sobre $\mathbb{R}$ tal que cada elemento tenga al menos una coordenada igual a cero.

2. Considere la transformación $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que rota vectores θ radianes en la dirección opuesta a las manecillas del reloj.
   (a) (30 puntos) Encuentre el núcleo, imagen y la matriz que representa la transformación T_θ.
   (b) (20 puntos) Considere el conjunto $\mathcal{R} = \{T_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ y una operación binaria $T_\theta + T_\varphi := T_{\theta+\varphi}$. Indique si la siguiente aserción es cierta o falsa: $(\mathcal{R}, +)$ forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$, para todo $p \in \mathbb{Z}$ primo. Argumente formalmente su respuesta.

3. Considere $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con el producto punto. Suponga que $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica y defina $T(x) = Mx$.
   (a) (20 puntos) Indique si el enunciado "Los vectores propios de M son ortogonales.$^{\text{es}}$ verdadero o falso, y argumente formalmente su respuesta.

4. Considere dos espacios vectoriales X y Y sobre $\mathbb{C}$, ambos de dimensión finita y con productos interiores p y q para X y Y respectivamente. Suponga además que $f : X \to Y$ es una transformación lineal suprayectiva, y que existe $g : Y \to X$ tal que $q(f(x), y) = p(x, g(y))$ para $x \in X, y \in Y$.
   (a) (10 puntos) Pruebe que g es inyectiva.
   (b) (10 puntos) Pruebe que el complemento ortogonal del núcleo de f es la imagen de g, y que X es entonces suma directa del núcleo de f y la imagen de g.

5. Sea $M = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$.
   (a) (20 puntos) Calcule los valores y vectores propios de M. ¿Son linealmente independientes los vectores propios de M?
   (b) (10 puntos) Calcule M^n para cualquier entero positivo n.
   (c) (10 puntos) Considere la transformación lineal $T(x) = Mx$ para $x \in \mathbb{R}^2$. Explique e ilustre con un dibujo el significado de los valores propios de M. Pista: considere las imágenes de los puntos $\{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$ bajo T.

Notación y definiciones. B^n es el *producto cartesiano* de n copias del conjunto B. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es el conjunto de *matrices* de n filas y n columnas con coeficientes en $\mathbb{K}$. Si $x \in \mathbb{K}^n$ y $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ entonces Mx es una *combinación lineal* de las columnas de M con pesos iguales a las entradas de x. $\mathbb{Z}_p$ es el *campo* de enteros módulo p. El *producto punto* de dos vectores $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ es $x_1y_1 + ... + x_ny_n$.