Examen General de Conocimientos: Álgebra Moderna.
Semestre 2023-II.
3 de agosto de 2023.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un **máximo de 3.5 horas**. Escoge y resuelve solamente 3 ejercicios de Teoría de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. Si se resuelven más de 3 ejercicios en cada sección, se calificarán los 3 primeros. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Demuestra que si G es un grupo cíclico de orden $n \geq 2$, entonces $Aut(G)$, el grupo de automorfismos de G, es isomorfo al grupo de unidades del anillo $\mathbb{Z}_n$.

2. Sea G un grupo simple. Demuestra lo siguiente:
   a) Si H es un subgrupo propio de G de índice $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un morfismo de grupos inyectivo de G a S_n, el grupo de permutaciones de un conjunto con n elementos.
   b) Si G es infinito entonces no tiene subgrupos propios de índice finito.

3. Sean $\varphi : G \longrightarrow H$ un morfismo de grupos suprayectivo y N' un subgrupo normal de H. Demuestra que la imagen inversa de N' bajo φ que denotamos $N := \varphi^{-1}(N')$, es un subgrupo normal de G y que ${}^{G}\!/_{N}$ es isomorfo a ${}^{H}\!/_{N'}$.

4. Demuestra lo siguiente:
   a) Ningún grupo de orden 12 es simple.
   b) Si p, q son primos distintos, entonces no existen grupos simples de orden p^2q.

5. Demuestra que si N es un subgrupo normal del grupo G tal que, tanto N como ${}^{G}\!/_{N}$ son grupos solubles, entonces G es soluble.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Sea R un anillo conmutativo. Demuestra que $R[x]$ en un D.I.P. si y solo si R es un campo.

2. Demuestra que el anillo $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$ no es un D.F.U.

3. Sean K un campo de característica p primo y $a \in K$. Demuestra que el polinomio $x^p - a$ es irreducible sobre K o se expresa como $(x-b)^p$ en $K[x]$.

4. Demuestra que si $E\mid_F$ es una extensión de Galois tal que el grupo de Galois, $Gal\left(E\mid_F\right)$, es abeliano entonces todo campo intermedio $K\mid_F$ es una extensión de Galois.

5. Sea $f(x) = x^4 - x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
   a) Demuestra que $f(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.
   b) Encuentra el campo de descomposición E de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$.
   c) Encuentra el grupo de Galois, $Gal\left(E\mid_{\mathbb{Q}}\right)$, del polinomio $f(x)$.