POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis

12 de enero del 2022
Semestre 2022-1

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- El examen contiene preguntas de dos áreas: análisis real y análisis complejo.
- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos, entre ellos por lo menos 6 puntos deberán obtenerse de cada una de las dos áreas.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

Análisis Real

1. (6 puntos) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles. Prueba

   a) $\mu\left(\liminf_n E_n\right) \leq \liminf_n \mu(E_n)$.

   b) Si $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < +\infty$ entonces $\limsup_n \mu(E_n) \leq \mu\left(\limsup_n E_n\right)$.

   c) Prueba que la desigualdad del inciso anterior puede fallar si $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = +\infty$.

   Recuerda: $\limsup_n E_n := \cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} E_k$, $\liminf_n E_n := \cup_{n\geq 1} \cap_{k\geq n} E_k$.

2. (6 puntos) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida.

   Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de reales positivos en ℓ^p, $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mu)$, prueba que

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{x : |f(x)| \geq 1/\lambda_n\} < \infty$$

   Recordar: $(a_n) \in \ell^p$ sii $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$.

3. (6 puntos) Sea f una función positiva y Lebesgue medible en B, la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$.

   Supongamos que para todo compacto $K \subset B$ se tiene que $\int_K f d\lambda < \infty$ pero $\int_B f d\lambda = \infty$, donde λ denota a la medida de Lebesgue.

   Prueba que para toda $r \in [0, \infty)$ existe un conjunto medible A tal que $\int_A f d\lambda = r$, es decir el rango de la medida $d\mu = f\, dx$ es $[0, \infty]$.

4. (6 puntos) Sea (X, Σ, μ) un espacio medible.

   a) Sea $f \in L_1^+(X, \Sigma, \mu)$. Prueba que

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

   es una medida sobre Σ tal que $\nu(E) = 0$ siempre que $\mu(E) = 0$ y que para toda $g \in L_1^+(X, \Sigma, \mu)$,

$$\int g d\nu = \int f g d\mu$$

   b) Sean $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L_1(X, \Sigma, \mu)$ y $f \in L_1(X, \Sigma, \mu)$ tal que $f_n \to f$ c.d. relativo a μ. Prueba que $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$ si y sólo si $\int_X |f_n| d\mu \to \int_X |f| d\mu$.

Análisis Complejo

1. (6 puntos) Demuestre que si f y $\overline{f}$ son funciones holomorfas en la región abierta Ω del plano complejo, entonces f es una función constante en Ω.

2. (6 puntos) Usando el Teorema del Residuo calcula la siguiente integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx.$$

3. (6 puntos) Sea g una función holomorfa en el disco $D_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, con $R > 1$. Además supón que $|g(z)| \leq 1$ para toda z con $|z| \leq 1$.

   (a) Prueba que para toda $w \in \mathbb{C}$ con $|w| < 1$, la ecuación

$$z = w g(z)$$

   tiene una solución única, $z = h(w)$, con $|z| < 1$.

   (b) Muestra que la función $w \to h(w)$ es holomorfa en el disco $|w| < 1$.

4. (6 puntos) Demuestre que si f es holomorfa en una región abierta que contiene a el semiplano superior cerrado $\overline{\mathbb{C}^+} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\}$, entonces para cada z en el semiplano abierto $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ se cumple

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) \Im z}{(t - \Re z)^2 + (\Im z)^2} dt.$$

   Para demostrar esta fórmula se puede utilizar la fórmula de Cauchy para la función f con el contorno de integración siendo un semicírculo formado por un arco en el semiplano superior y el segmento $[-R, R]$ $(R > 0)$.