Examen de Conocimientos Generales
Análisis Numérico
Semestre 2021-2

Julio 2021

Instrucciones: Resuelva todos los ejercicios explicando con detalle su procedimiento.
Calificación: Suma de puntos dividida por 3. Requiere al menos 18 puntos para aprobar.
Duración: 4 horas.

$\boxed{\mathbf{1}}$ (4 puntos) Considere un sistema de punto flotante de base β y precisión p. Denote por $x_{\text{mín}}$ al número flotante positivo más pequeño y por $x_{\text{máx}}$ al más grande. Sea x un número real positivo tal que:

$$x_{\text{mín}} \leq x \leq x_{\text{máx}}.$$

El número real x se aproxima por el número flotante $fl(x)$ usando redondeo al más cercano. Pruebe que la unidad de redondeo del sistema de punto flotante es una cota superior para el error relativo generado al reemplazar x por $fl(x)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ *Descomposición en Valores Singulares.* Sea A una matriz real $m \times n$ de rango r con $m \geq n \geq r$. La matriz A tiene una factorización matricial de la forma:

$$A = U\Sigma V^t,$$

donde

- U es una matriz ortogonal $m \times m$,
- V es una matriz ortogonal $n \times n$,
- $\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}_{m\times n}$,
- $D = \text{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ con $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$.

Los elementos $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$ se conocen como los valores singulares de A. Las columnas $u_1, \ldots, u_m$ de U se llaman vectores singulares izquierdos de A, y las columnas $v_1, \ldots, v_n$ de V se llaman vectores singulares derechos de A.

a) (2 puntos) Pruebe que la norma-2 de A está dada por el valor singular más grande de A:

$$\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sigma_1.$$

b) (2 puntos) Sea $b \in \mathbb{R}^m$. Suponga que la matriz A tiene rango completo por columnas. Pruebe que la solución de mínimos cuadrados del sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ está dada por:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^t b}{\sigma_i} v_i.$$

3 (4 puntos) *Actualización de la Factorización de Cholesky.* Sea A una matriz real simétrica de tamaño 3×3. Suponga que existe una matriz triangular superior R de tamaño 3×3 con todos sus elementos positivos en la diagonal principal tal que:

$$A = R^t R.$$

Sea $y \in \mathbb{R}^3$. El objetivo es hallar una matriz $\widetilde{R}$ de tamaño 4×3 con todos sus elementos iguales a cero debajo de la diagonal principal tal que:

$$A + yy^t = \widetilde{R}^t \widetilde{R}.$$

Encuentre una matriz ortogonal Q de tamaño 4×4 tal que la matriz:

$$\widetilde{R} = Q \begin{bmatrix} R \\ y^t \end{bmatrix},$$

tiene todos sus elementos iguales a cero debajo de la diagonal principal.

4 (4 puntos) *Aproximación de la Segunda Derivada.* Sea f una función de valores reales definida sobre el intervalo $[a, b]$ tal que $f^{(4)}$ es continua en $[a, b]$. Sea $x \in (a, b)$, y sea h un número positivo tal que $a < x - h$ y $x + h < b$. Demuestre que:

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi),$$

para algún $\xi \in (x - h, x + h)$.

5 (4 puntos) Encuentre el *spline* cuadrático $s \in C^1[0, 3]$ en la partición $\{0, 1, 2, 3\}$ del intervalo $[0, 3]$ tal que:

$$s'(0) = 0, \quad s(0) = 0, \quad s(1) = 1/2, \quad s(2) = 1/2, \quad s(3) = 0.$$

6 (4 puntos) Sea g una función de valores reales. Suponga que existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $g(\xi) = \xi$ y que g es continuamente diferenciable en una vecindad de ξ, donde:

$$|g'(\xi)| > 1.$$

Pruebe que la sucesión:

$$x_{k+1} = g(x_k),$$

no converge a ξ para cualquier valor inicial x_0 distinto de ξ.

$\boxed{\mathbf{7}}$ *Cuadratura de Gauss-Chebyshev.*

a) (2 puntos) El polinomio de Chebyshev T_k de grado k se define como:

$$T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos(x)), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Demuestre que cada T_k es un polinomio de grado k. Para ello pruebe la relación de recurrencia:

$$T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x) = 2xT_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Sugerencia: Use la identidad trigonométrica:

$$\cos(k+1)t + \cos(k-1)t = 2\cos(t)\cos(kt), \quad k = 1, 2, \ldots$$

b) (2 puntos) Pruebe que los polinomios de Chebyshev satisfacen la relación de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0 \quad \text{si } m \neq n.$$

c) (2 puntos) Halle los nodos x_k y los pesos w_k de la regla de cuadratura:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} w_k f(x_k),$$

de modo que sea exacta para polinomios de grado menor o igual a $2n-1$. *Sugerencia:* Escoga los nodos iguales a los ceros de T_n.