Examen de Conocimientos Generales
Análisis Numérico

Semestre 2022-1

Enero 2022

Duración: 4 horas.

Calificación: Suma de puntos dividida por 3. Requiere al menos 18 de 30 puntos para aprobar.

Instrucciones: Resuelva todos los ejercicios explicando con detalle su procedimiento.

1 (4 puntos) *Espaciamiento entre dos números flotantes consecutivos.*

Considere un sistema de punto flotante $fl(\beta, \rho, L, U)$. Sea x un número flotante normalizado positivo. Denote por x^+ al siguiente número flotante normalizado mayor que x, y denote por u a la unidad de redondeo por corte. Supónga que los elementos normalizados del sistema tienen su primer dígito a la izquierda del punto flotante y que tanto x como x^+ tienen el mismo exponente. Pruebe que:

$$\frac{1}{\beta} u|x| \leq x^+ - x \leq u|x|.$$

2 *Aproximación de la pendiente por diferencias finitas centradas.*

Sea f una función de valores reales en $C^3([a,b])$ tal que f''' está acotada por arriba por $M > 0$. Sea $x \in (a,b)$, y sea h un número positivo tal que $a < x-h$ y $x+h < b$. La pendiente de f en x se aproxima por:

$$D(x,h) = \frac{f(x+h) - (x-h)}{2h}.$$

a) (2 puntos) Demuestre que el error de aproximación es de orden $\mathcal{O}(h^2)$, es decir, pruebe que:

$$f'(x) = D(x,h) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi),$$

para algún $\xi \in (x-h, x+h)$.

b) Supónga que hay errores de redondeo $e(x+h)$ y $e(x-h)$ asociados a la evaluación de f en $x+h$ y $x-h$, respectivamente, ambos acotados por arriba por $\delta > 0$. Sean:

$$\hat{f}(x+h) = f(x+h) + e(x+h),$$
$$\hat{f}(x-h) = f(x-h) + e(x-h).$$

El error total en la aproximación de $f'(x)$ con x fijo es:

$$E(h) = f'(x) - \frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x-h)}{2h}.$$

(I) (1 punto) Pruebe que:

$$|E(h)| \leq \frac{Mh^2}{6} + \frac{\delta}{h}.$$

(II) (1 punto) Halle el tamaño de paso:

$$h_{\text{mín}} = \arg\min_h \left(\frac{Mh^2}{6} + \frac{\delta}{h} \right)$$

$\boxed{3}$ *Matrices Positivas Definidas y Proyecciones Ortogonales.*

a) (1 punto) Pruebe que ninguna matriz de Householder es positiva definida.

b) Sea:

$$\boldsymbol{u}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Denote por P_u a la proyección ortogonal sobre la recta generada por $\boldsymbol{u}$.

(I) (1 punto) Demuestre que la matriz $I_n - P_u$ es una simétrica positiva semidefinida, donde I_n es la matriz identidad $n \times n$.

(II) (1 punto) Justifique porque $I_n - P_u$ no es una matriz positiva definida.

c) Sea A una matriz real $m \times n$ con $m > n$ y columnas linealmente independientes, sea $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, y sea P la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^m$ sobre el espacio columna de A.

(I) (2 puntos) Pruebe que: $\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|_2^2 = \|\boldsymbol{b} - P\boldsymbol{b}\|_2^2$.

(II) (2 puntos) Sea $\boldsymbol{x}$ la solución de las ecuaciones normales $A^tA\boldsymbol{x} = A^t\boldsymbol{b}$. Pruebe que $P\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$.

$\boxed{4}$ (5 puntos) *Propiedad de norma mínima del spline cúbico natural.*

Considere una partición del intervalo $[0, 1]$:

$$0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1.$$

Sea f una función de valores reales en $C^2([0, 1])$. Sea S el polinomio cúbico por tramos en $C^2([0, 1])$ definido sobre los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ para $i = 1, \ldots, n-1$ tal que:

$$S''(0) = S''(1) = 0 \quad \text{y} \quad S(x_i) = f(x_i), \quad \text{para } i = 1, \ldots, n.$$

De todas las funciones $g \in C^2([0,1])$ que interpolan a f en los puntos $x_1, \ldots, x_n$, la función S mínimiza $\|g''\|$, donde:

$$\|g\| = \sqrt{\int_0^1 [g(x)]^2 dx}.$$

Para verificar esta afirmación pruebe que:

$$\|g'' - S''\|^2 = \|g''\|^2 - \|S''\|^2.$$

Sugerencia: Use integración por partes.

$\boxed{\mathbf{5}}$ *Cuadratura de Gauss-Legendre via Interpolación de Hermite.*

Sea f una función diferenciable de valores reales sobre el intervalo $[-1,1]$, y sean $x_1, \ldots, x_n \in [-1,1]$. La función f se aproxima por un polinomio que interpola tanto a f como a f' en los ceros de polinomios ortogonales para obtener una regla de cuadratura gaussiana:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) w_i.$$

A partir de los polinomios de Lagrange:

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

se introduce un polinomio en la representación de Hermite:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) H_i(x) + \sum_{i=1}^{n} f'(x_i) K_i(x),$$

donde:

$$\begin{array}{l} H_i(x) = [1 - 2\ell'(x_i)(x - x_i)]\ell_i^2(x), \\ K_i(x) = (x - x_i)\ell_i^2(x), \end{array} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

a) (2 puntos) Pruebe que Q es un polinomio de grado $2n-1$ que interpola tanto a f como a su derivada en los puntos $x_1, \ldots, x_n$.
Sugerencia: Halle las evaluaciones y pendientes de H_i y K_i en los puntos dados.

Además de los polinomios interpolantes, se utiliza una familia de polinomios ortogonales respecto al intervalo $[-1,1]$, a saber, los polinomios de Legendre:

$$\begin{array}{l} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x, \\ P_k(x) = \left(\dfrac{2k-1}{k}\right) x P_{k-1}(x) - \left(\dfrac{k-1}{k}\right) P_{k-2}(x), \quad k = 2, \ldots, n. \end{array}$$

Estos polinomios satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)dx = 0, \quad \text{para } i,j = 1,\ldots,n, \quad \text{con } i \neq j,$$

más aún, $\{P_0,\ldots,P_n\}$ es una base para los polinomios de hasta grado n.

b) (2 puntos) Tome $x_1,\ldots,x_n$ iguales a los ceros del polinomio P_n. Pruebe que:

$$\int_{-1}^{1} K_i(x)dx = 0, \quad i = 1,\ldots,n.$$

c) (2 puntos) Pruebe que los pesos de la cuadratura gaussiana están dados por:

$$w_i = \int_{-1}^{1} H_i(x)dx, \quad i = 1,\ldots,n.$$

6 (4 puntos) Sea $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ una función invertible y continuamente diferenciable. Supónga que:

$$\min_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)| > 1.$$

Pruebe que la sucesión:

$$x_{k+1} = \varphi^{-1}(x_k),$$

converge a la solución x_* de la ecuación:

$$\varphi(x) = x,$$

para cualquier valor inicial $x_0 \in [a,b]$.