Examen de Conocimientos Generales
Análisis Numérico

Semestre 2023-2

4 de Agosto 2023

Instrucciones

- Resuelva todos los ejercicios explicando con detalle su procedimiento.
- **Calificación**: Suma de puntos dividida por 2. Requiere 12 puntos para aprobar.
- **Duración**: 4 horas.

Problemas

$\boxed{\textbf{1}}$ (1 punto) Podemos calcular e^{-x} utilizando polinomios de Taylor de dos formas diferentes, ya sea utilizando

$$e^{-x} \approx 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

o bien con

$$e^{-x} \approx \frac{1}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots}$$

Indique qué enfoque es más susceptible a errores de redondeo.

$\boxed{\textbf{2}}$ Considere una computadora que utiliza aritmética binaria con 24 bits para la parte fraccionaria.

a) ($\frac{1}{2}$ punto) Si las operaciones se realizan con redondeo, ¿cuál es el épsilon de la máquina?

b) ($\frac{1}{2}$ punto) ¿Qué sucede si se realiza truncamiento en lugar de redondeo?

$\boxed{\textbf{3}}$ (2 puntos) Considere un sistema decimal flotante con una precisión de cinco dígitos en la mantisa y un rango de exponente entre -3 y 3. ¿Cuántos números flotantes normalizados positivos hay en el intervalo $[11, 101]$?

$\boxed{\mathbf{4}}$ *Matrices SPD (Simétricas Definidas Positivas)*

a) (1 punto) Demuestra que una matriz con al menos un elemento negativo en la diagonal principal no puede ser SPD.

b) (2 puntos) Sea α un número real, y sea A la matriz dada por:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Para qué valores de α la matriz A es SPD?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Sea A una matriz invertible de tamaño 3×3, la transformación lineal $x \mapsto Ax$ mapea la esfera unitaria a un elipsoide $\mathcal{E}$. Se desea determinar cómo varía la excentricidad de $\mathcal{E}$ en dos casos distintos:

a) (1 punto) Si A está mal condicionada, ¿cómo se ve afectada la excentricidad de $\mathcal{E}$? Incluya un dibujo ilustrativo.

b) (1 punto) De manera similar, ¿cómo se comporta la excentricidad de $\mathcal{E}$ cuando A está bien condicionada?

$\boxed{\mathbf{6}}$ *Interpolación de Lagrange.*

a) (1 punto) Sea f un polinomio de grado $\leq n$, y sea p_n un polinomio interpolante de f en los $n+1$ nodos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$; con el mismo grado que f. Demuestra que $p_n(x) = f(x)$ para todo x, es decir, que al interpolar a un polinomio reproducirá el polinomio original si se utilizan suficientes nodos.

b) (1 punto) Sea p un polinomio de grado a lo más n. Utiliza la unicidad del polinomio interpolante para mostrar que podemos escribir

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i^{(n)}(x) p\left(x_i\right), \text{ donde } L_i^{(n)}(x) = \prod_{k=0 \ k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

para cualquier conjunto de nodos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. *Sugerencia*: ocupa el inciso anterior.

$\boxed{\mathbf{7}}$ (2 puntos) Calcula el spline cúbico de Hermite que interpola la función $f(x) = x^5$, utilizando los nodos $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2, x_2 = 1$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ (2 puntos) Dada $f : [0,1] \to [0,1]$, supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g = f^n$ es una función de contracción, es decir, existe una constante $\lambda \in [0,1)$ tal que la siguiente desigualdad se cumple para cualesquiera x e y en el intervalo $[0,1]$:

$$|g(x) - g(y)| \leq \lambda |x - y|$$

Demuestre que la función f tiene un único punto fijo $\overline{x} \in [0,1]$.

$\boxed{9}$ (2 puntos) **Teorema (Estimación del error para la regla del trapecio)**. Sea $f \in C^2([a,b])$ y sea $T_n(f)$ la aproximación por la regla del trapecio con n subintervalos de una partición uniforme para la integral:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Entonces existe $\xi_h \in [a,b]$, dependiente de h, tal que

$$I(f) - T_n(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi_h).$$

Considere la función de error:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

¿Qué tan pequeño debe ser h para calcular $\operatorname{erf}(x)$ mediante la regla del trapecio, con una precisión de 10^{-8} para todo $x \in [0,1]$?

$\boxed{10}$ *Una regla de cuadratura exacta.*

a) (1 punto) Determina los valores de α, β y γ de modo que la regla de cuadratura:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \alpha f\left(-\frac{1}{2}\right) + \beta f(0) + \gamma f\left(\frac{1}{2}\right)$$

sea exacta para todos los polinomios de hasta grado 2.

b) (2 puntos) Utiliza el inciso anterior y un cambio de variable adecuado para calcular una aproximación de la integral:

$$\int_1^2 x \ln x dx.$$

General Exam
Numerical Analysis
Semestre 2023-2

4th August 2023

Instructions

- Solve all the exercises, explaining your procedure in detail.
- **Grade**: Sum of points divided by 2. A minimum of 12 points is required to pass.
- **Duration**: 4 hours.

Exercises

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1 point) We can compute e^{-x} using Taylor polynomials in two ways, either using

$$e^{-x} \approx 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

or using

$$e^{-x} \approx \frac{1}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots}$$

Discuss which approach is more susceptible to rounding errors.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Consider a computer that uses binary arithmetic with 24 bits for the fractional part.

a) ($\frac{1}{2}$ point) If the floating-point operations are carried out by rounding, what is the machine epsilon?

b) ($\frac{1}{2}$ point) If the floating-point operations are carried out by truncating, what is the machine epsilon?

$\boxed{\mathbf{3}}$ (2 points) Consider a decimal floating-point system with a precision of five digits in the mantissa and an exponent range between -3 and 3. How many positive normalized floating-point numbers are there in the interval $[11, 101]$?

$\boxed{4}$ *SPD Matrices (Symmetric Positive Definite Matrices)*

a) (1 point) Show that a matrix with one or more non-positive main diagonal elements cannot be SPD.

b) (2 points) Let α be a real number, and let A the matrix given by:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

For which values of α is A an SPD matrix?

$\boxed{5}$ Let A be an invertible matrix of size 3×3, the linear transformation $x \mapsto Ax$ maps the unit sphere to an ellipsoid $\mathcal{E}$, we want to determine how the eccentricity of $\mathcal{E}$ varies in two different cases:

a) (1 point) When A is ill conditioned, how is the eccentricity of $\mathcal{E}$ affected? Include an illustrative drawing.

b) (1 point) Similarly, how does the eccentricity of $\mathcal{E}$ behave when A is well conditioned?

$\boxed{6}$ *Lagrange Interpolation.*

a) (1 point) Let f be a polynomial of degree $\leq n$, and let p_n be an interpolating polynomial of f at the $n+1$ distinct nodes $x_0, x_1, \ldots, x_n$; with the same degree as f. Prove that $p_n(x) = f(x)$ for all x, i.e., that interpolating to a polynomial will reproduce the polynomial if you use enough nodes.

b) (1 point) Let p be a polynomial of degree $\leq n$. Use the uniqueness of the interpolating polynomial to show that we can write

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i^{(n)}(x) p\left(x_i\right), \text{ where } L_i^{(n)}(x) = \prod_{k=0\ k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

for any distinct set of nodes $x_0, x_1, \ldots, x_n$. *Hint:* See the previous item.

$\boxed{7}$ (2 points) Compute the cubic Hermite spline that interpolates $f(x) = x^5$, using the nodes $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2, x_2 = 1$.

$\boxed{8}$ (2 points) Given $f : [0, 1] \to [0, 1]$, let's assume that there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $g = f^n$ is a contraction mapping. In other words, there exists a constant $\lambda \in [0, 1)$ such that the following inequality holds for all x and y in the interval $[0, 1]$:

$$|g(x) - g(y)| \leq \lambda |x - y|$$

Prove that the function f has a unique fixed point $\overline{x} \in [0, 1]$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ (2 points) **Theorem (Trapezoid Rule Error Estimate)**. Let $f \in C^2([a,b])$ and let $T_n(f)$ be the n-subinterval trapezoid rule approximation to

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

using a uniform grid. Then there exists $\xi_h \in [a,b]$, depending on h, such that

$$I(f) - T_n(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi_h).$$

Consider the error function,

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

How small must h be to compute $\operatorname{erf}(x)$ using the trapezoid rule, to within 10^{-8} accuracy for all $x \in [0,1]$?

$\boxed{\mathbf{10}}$ *An exact quadrature rule.*

a) (1 point) Compute the values of α, β, and γ such that the quadrature rule:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \alpha f\left(-\frac{1}{2}\right) + \beta f(0) + \gamma f\left(\frac{1}{2}\right)$$

is exact for all polynomials of degree ≤ 2.

b) (2 points) Use the previous problem and an appropriate change of variable to calculate an approximation of the integral:

$$\int_1^2 x \ln x dx.$$