Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM Código (e.g. MAHV19760313)
Examen general: Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias
Julio 28, 2021

Instrucciones. Tiene 3 horas para para trabajar en su examen. Entregue una sección de respuestas y adjunte en una sección separada su trabajo en borrador. Se le recomienda que comience a redactar la sección de respuestas al menos 15 minutos ***antes*** de la hora límite. En la esquina superior derecha de cada página, escriba sus iniciales comenzando por su nombre, seguidas de su fecha de nacimiento en 8 dígitos (e.g. MAHV19760313). Favor de no escribir en la tabla de la derecha. Entregue su examen ***en un solo archivo pdf*** cuyo nombre comience como en sus hojas de examen (e.g. MAHV19760313_snEDO.pdf). Los examenes que no cumplan con las instrucciones, o que no sean legibles (e.g. respuestas con tachones o borrones) no serán calificados.

Problema	Max	Puntos
1	30	
2	40	
3	60	
4	40	
5	40	
Total:	210	

Preguntas

1. *Errores con respecto a polinomios de Taylor*. Suponga que una función $f(x)$ tiene $n+1$ derivadas contínuas en un intervalo $[a,b]$. Suponga además que $p_n(x;x_0)$ es el polinomio de Taylor de grado n asociado a f al rededor de x_0.
   (a) (10 puntos) Calcule $p_n(x)$
   (b) (10 puntos) Calcule el residuo $R_n(x) = f(x) - p_n(x;x_0)$ para $x \in [a,b]$.
   (c) (10 puntos) Aplique los cálculos anteriores para la función e^-x alrededor de $x_0 = 0$, para $n \geq 0$.

2. *Errores absoluto y relativo*. Considere una aproximación x_A para una cantidad x,
   (a) (20 puntos) Defina el error absoluto y el error relativo.
   (b) (10 puntos) Defina una cota superior para el error relativo tal que x_A tenga k dígitos significativos de precisión en relación a x.
   (c) (10 puntos) ¿Cuántos dígitos de precisión tiene $x_A = 22/7$ relativo a $\pi = 3.1415926535...$. Verifique su definición de precisión con la cota superior del inciso anterior.

3. *Estabilidad en problemas de valor inicial*. Sea $\partial_x y = f(x, y(x))$, con $y(x_0) = y_0$. Suponga que busca una solución en un intervalo finito $x_0 < x < b$. Sean $\varepsilon > 0$ y y_ε la solución a la ecuación a partir del valor inicial $y_0 + \epsilon$ (problema perturbado).
   (a) (10 puntos) ¿Qué condiciones tienen que satisfacer para que una solución $y(x)$ exista y sea única?
   (b) (20 puntos) ¿Qué condiciones se tienen que cumplir para que el problema de valor inicial sea estable? Es decir, para que
   $$\text{máx}\{|y_\epsilon(x) - y(x)| : x_0 \leq x \leq b\} \leq c\varepsilon,$$
   para alguna $c > 0$. Ilustre su respuesta con dos ejemplos simples, uno para soluciones estables, y uno para inestabilidad.
   (c) (10 puntos) ¿Qué tiene que ver la estabilidad con la existencia y unicidad de las soluciones? Explique de la forma más formal posible.
   (d) (10 puntos) Demuestre que
   $$y(x) - y_\varepsilon(x) = -\varepsilon \exp\left(\int_{x_0}^{x} g(t)dt\right),$$
   con $g(t) = \partial_z f(t,z)$ en $z = y(t)$, para x suficientemente cercano a x_0.
   (e) (10 puntos) Considere la ecuación lineal $\partial_x y = ay(x) + b(x)$, con $x \leq x_0$, y a una constante dada, cuya solución general es
   $$y(x) = ce^{ax} + \int_{x_0}^{x} e^{a(x-t)}b(t)dt \tag{1}$$
   Verifique que $y(x) \equiv 1$ es la solución al problema $\partial_x y = 1 - y(x)$, con $y(0) = 1$, para $0 \leq x \leq b$; que la solución al problema perturbado es $y_\epsilon(x) = 1 + \epsilon e^{-x}$, para $x \leq 0$; y que (c) la solución al problema de valor inicial es estable en $[0,b]$.

4. Euler y Runge Kutta. Considere un problema de valor inicial $\partial_t x = f(t,x)$, con $x(t_0) = x_0$, para $x \in [t_0, b]$. Considere una discretización $x_0 < x_1 < ... < x_N \leq b$ y suponga que $x_n = x_0 + nh$, para alguna $h > 0$ y $n \in \{0, ..., N\}$.
   (a) (10 puntos) Describa el método de Euler (hacia enfrente) y defina el error de truncación para dicho método (Pista: considere el teorema de Taylor para aproximar la solución al sistema al rededor de un (cada) punto de la discretización).

(b) (20 puntos) Describa los métodos de Runge-Kutta (RK) de orden 2 y de orden 4, y escriba pseudo código para describir una iteración en la que pueda calcular soluciones a una ecuación diferencial con Euler, RK2 ó RK4.

(c) (10 puntos) Compare la diferencia entre las aproximaciones a las soluciones con RK2 y RK4 en el mismo paso. Calcule 2 pasos de la solución a la ecuación $\partial_t v = -\sinh(\alpha v)$.

5. Problema rígido (stiff). Sean $u(t) = (v(t), w(t))$, $u_0 = (v_0, w_0)$, y considere la ecuación

$$\partial_t u = Au, \quad u(0) = u_0, \tag{2}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a + ib \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) (10 puntos) Calcule la solución de la ecuación (2).

(b) (10 puntos) Suponga que $a << -1$ y $|w_0| << 1$. ¿Son suficientes esta condición para llamar rígido al problema? Pista: Describa qué pasa con las soluciones. En particular, compare las dos componentes de las soluciones y tome en cuenta sus escalas temporales.

(c) (10 puntos) Suponga un paso de tamaño h para calcular una solución numérica. Demuestre que la iteración del mapeo definido por el método de Euler aplicado la ecuación (2) da

$$u_n = (I + hA)^n u_0 = \begin{pmatrix} (1-h)^n v_0 \\ (1 + (a+ib)h)^n w_0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

(d) (10 puntos) Describa las condiciones que tiene que cumplir h para que la aproximación de la solución con $a << -1$ y $|w_0| << 1$ sea buena. Es decir, que se

$$u(t) \approx \begin{pmatrix} e^{-t} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pista: Considere $(1-h)^n$ y $(1-(a+ib)h)^n$ por separado.