Examen: Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Enero de 2022

Resuelva 3 de los siguientes 4 problemas. Duración: 3 horas.

Problema 1.- Verifique que el método de Richtmyer Lax-Wendroff de dos pasos

$$u_{j\pm 1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j\pm 1}^n - \frac{k}{2h}[f(u_{j\pm 1}^n) - f(u_j^n)]$$
$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{k}{h}\left[f(u_{j+1/2}^{n+1/2}) - f(u_{j-1/2}^{n+1/2})\right]$$

donde $h = \Delta x$ y $k = \Delta t$. para la ley de conservación $u_t + f(u)x = 0$ se reduce a

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{k}{2h}a(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{k^2}{2h^2}a^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

para el caso lineal con coeficientes constantes (i.e., f(u) = au); demuestre que tiene una precisión de segundo orden para soluciones suaves (para el caso no lineal) y que es conservativo. Encuentre la ecuación modificada para el método de Lax-Wendroff para el caso lineal (i.e. cuando f(u) = au).

Problema 2.- Considere el siguiente sistema de m ecuaciones

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})_x = 0 \tag{1}$$

hiperbólico, para todo punto $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ y sea

$$A(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{u}}$$

con condiciones iniciales

$$\boldsymbol{u}(x, 0) = \boldsymbol{u}_0(x).$$

1. Explique cómo se desacopla el sistema cuando la matriz A es constante.
2. Para el caso en el que A sea constante, describa los pasos centrales de un algoritmo numérico upwind, del tipo proyección sobre las características, para obtener la solución del sistema.

3. Diga en términos generales, cuales son los cambios algorítmicos más significativos que surgen cuando la matriz A depende de $\boldsymbol{u}$, es decir cuando el sistema es cuasi-lineal.

Problema 3.- A partir de la evolución exacta de las celdas,

$$0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} u(\xi, t)_t \, d\xi + \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} f(u(\xi, t))_\xi \, d\xi$$

donde $I_x = [x - \Delta x/2, x + \Delta x/2]$ y

$$\bar{u}(x,t) = \frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} u(\xi, t) d\xi = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} u(\xi, t) d\xi. \qquad (2)$$

Explique de forma explícita cómo se obtienen los métodos upwind y centrales.

Explique qué se entiende por evolución y reconstrucción, diga por qué en el caso upwind se requiere resolver problemas de Riemann mientras que para los algoritmos centrales no. Explique por qué los esquemas upwind son difusivos mientras que los centrales son dispersivos.

Problema 4.-

Describa detalladamente el algoritmo de Godunov. Use los teoremas de Lax-Wendoff y de Harten, para demostrar que el esquema converge a la solución débil.