POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Complejo

Julio 2023
Semestre 2023-2

Puntos: 36 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja, su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja y deberá enumerar todas la hojas.

---

1. (6 puntos) Sea $a > 0$. Calcula la siguiente integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx.$$
2. (6 puntos) Considere $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
   a Muestre que si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es analítica y tiene dos puntos fijos entonces $f(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
   b ¿Las funciones holomorfas $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tienen puntos fijos?
3. (6 puntos) Sea $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Muestre que todos los mapeos conformes $f : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ son de la forma
$$e^{i\theta} \frac{z - \beta}{z - \overline{\beta}}$$
   con $\theta \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{H}$.
4. (6 puntos) Sea $f(z)$ una función analítica inyectiva en un dominio D. Demuestre que $f(z)$ es conforme.
5. (6 puntos) Suponga que f es entera y que existe una sucesión acotada de números reales distintos, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $f(a_n)$ es real para cada $n \geq 1$.

   Muestre que $f(z)$ es real para $z \in \mathbb{R}$. Además, si $\{a_n\}$ es decreciente y $a_n \to 0$ cuando $n \to 0$, y $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$ para todos $n \geq 1$, demuestre que f es constante.
6. (6 puntos) Sea $f(z)$ analítica en $|z| \leq R$ y tal que $f(0) = 0$. Demuestre que
$$F(z) = f(z) + f\left(z^2\right) + f\left(z^3\right) + \dots$$
   es analítica en $|z| \leq R$, y que además
$$|F(z)| \leq \frac{r}{1 - r} \quad (|z| = r < R).$$