UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Funcional

Julio del 2023
Semestre 2023-2

Puntos: 36   Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja, su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja y deberá numerar cada hoja.

---

1. (6 puntos) Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio de Banach X y supongamos que converge, en la topología débil, a un punto $x \in X$. Prueba que

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geq \|x\|$$

2. (6 puntos) Sea X un espacio de Banach.

   (i) Prueba que una sucesion $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy si y sólo si la sucesión $(\ell(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente de Cauchy para $\ell \in X^*$, con $\|\ell\| \leq 1$ (o sea, para toda $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tales que $\|\ell(x_n) - \ell(x_m)\| < \epsilon$ para todos $n, m \geq \mathbb{N}$, $\ell \in X^*$, con $\|\ell\| \leq 1$).

   (ii) Sea $D \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo en el conjunto de los numeros complejos $\mathbb{C}$. Considera una funcion $F : D \to X$.

   Decimos que F is fuertemente analitica en D si para cada $z \in D$ se tiene que el limite de $\frac{F(z+h)-F(z)}{h}$ existe en X cuando h tiende cero.

   Decimos que F es debilmente analitica en D si $\ell(F(\cdot))$ es analitica en D para cada $\ell \in X^*$.

   Probar que F es debilmente analitica si y solo si F es fuertemente analitica.

   Sugerencia:

   Sea $z_0 \in D$ fijo. Sea $\Gamma \subset D$ un circulo con centro en z_0. Muestra que para cada $\ell \in X^*$:

$$\ell\left(\frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h}\right) - \frac{d\ell \circ F}{dz}(z_0)$$
$$= \frac{1}{2\pi\imath}\int_{z\in\Gamma}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{z-(z_0+h)} - \frac{1}{z-z_0}\right) - \frac{1}{(z-z_0)^2}\right]\ell(F(z))dz$$

Para cada $z \in \Gamma$, considera el funcional $G_z : X^* \to \mathbb{C}$ dado por $G_z(\ell) = \ell(F(z))$. Recuerda Banach-Steinhauss.

3. (6 puntos) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert sobre el campo de los numeros complejos $\mathbb{C}$ con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Supongamos que tenemos una funcion $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ con las siguientes propiedades, válidas para todo $x, y, z \in \mathcal{H}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

   (i) $B(x, \alpha y + \beta z) = \alpha B(x, y) + \beta B(x, z)$

   (ii) $B(\alpha x + \beta y, z) = \bar{\alpha} B(x, z) + \bar{\beta} B(y, z)$

   (iii) Existe $C \geq 0$ tales que $|B(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|$

   Prueba que existe un úunico operador lineal acotado $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que

   $$B(x, y) = \langle Ax, y \rangle$$

   para todo $x, y \in \mathcal{H}$, además la norma de A es igual a la constante C más chica que hace válido (iii).

4. (6 puntos) Sea $[a, b]$, $a < b$, un intervalo cerrado en el conjunto de numeros reales $\mathbb{R}$. Sea $X = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$ dotado de una estructura de espacio vectorial bajo la suma de funciones y multiplicacion por escalares usuales.

   (i) Probar que X dotado de la norma

   $$\|f\| = \text{máx}\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$$

   $f \in X$, es un espacio de Banach.

   (ii) Probar que X dotado de la norma

   $$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$$

   no es un espacio de Banach.

5. (6 puntos) Denota $H = L^2([0, 1])$ y para $u \in H$ considera el funcional

   $$Tu = \int_0^{1/2} u(t) dt$$

   Demuestra que:

   a) T está bien definida (es decir, $\int_0^{1/2} u(t)dt < +\infty$),

   b) $T \in H^*$ (el espacio dual de H),

   c) $\|T\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. (6 puntos) Sea X un espacio de Banach y $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operador lineal. Asume que existe algún $\lambda > 0$ tal que el operador

   $$\lambda I - A : D(A) \to X$$

   es biyectivo, $(\lambda I - A)^{-1}$ es acotado con $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

   Demuestra que A es cerrado.

   Nota: un operador parcialmente definido $A : D(A) \to X$ es cerrado sii su gráfica es cerrada en $X \times X$, es decir si $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$ en X entonces $x \in D(A)$ y $Ax = y$.