Universidad Nacional Autónoma de México

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Real

Julio 2023
Semestre 2023-2

Puntos: 36 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja, su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja y deberá enumerar todas la hojas.

---

1. (6 pts) Sea $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas en $\mathbb{R}$. Pruebe que el conjunto de puntos en los que la secesión converge es un $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$.

   Nota:

   - un conjunto A se llama $\mathcal{F}_\sigma$ sii $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, donde cada F_n es cerrado.
   - un conjunto B se llama $\mathcal{G}_\delta$ sii $B = \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, donde cada G_n es abierto.
   - un conjunto es $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ es es la intersección numerable de $\mathcal{F}_\sigma$.

2. (6 pts) Construya una función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua, estrictamente monótona y tal que $g' = 0$ en un conjunto de medida positiva.

3. (6 pts) Pruebe que, si ℓ_∞ es el espacio de sucesiones acotadas de reales y $\|(\xi_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|\xi_n|\}$, entonces $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

4. (6 pts) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y sean f, g dos funciones reales, $\mathcal{M}$-medibles e μ-integrables. Defina
$$F_t = \{x \in X : f(x) > t\}$$
y
$$G_t = \{x \in X : g(x) > t\}.$$
Pruebe que
$$\int_X |f - g| d\mu = \int_{\mathbb{R}} \mu((F_t - G_t) \cup (G_t - F_t)) dt.$$

5. (6 pts) Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ el espacio de medida donde donde $\mathcal{L}$ es la σ-álgebra de los Lebesgue medibles de $\mathbb{R}$, y m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Sean $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones Lebesgue medibles. Suponga

a) $f_n \to f$ casi donde sea rel. a m.

b) $\int_{\mathbb{R}} |x||f_n(x)|dm \leq 25$ para todo n.

c) $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2 dm \leq 25$ para todo n.

Pruebe que:

a) $f_n \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ para todo n.

b) $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$.

c) $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_1 = 0$.

6. (6 pts) Algunos de los siguientes enunciados son falsos. Diga cuales son falsos y dé un contraejemplo. $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones en $L^4([0,1], m)$.

   a) Si f_n converge a f casi donde sea entonces una subsucesión converge a f en $L^4([0,1], m)$.

   b) Si f_n converge a f en $L^4([0,1], m)$ entonces una subsucesión converge casi donde sea.

   c) Si f_n converge a f en $L^4([0,1], m)$ entonces f_n converge a f en medida.

   d) Si f_n converge a f en medida entonces f_n converge a f en $L^4([0,1], m)$.