Universidad Nacional Autónoma de México.
Facultad de Ciencias.
Examen General de Conocimientos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias del Programa de Maestría en Ciencias Matemáticas.

CALIFICACIÓN

PREGUNTA	P1	P2	P3	P4	P5	TOTAL
PUNTOS						

ESTUDIANTE: MATRÍCULA:

INSTRUCCIONES:
Resuelva cada uno de los siguientes problemas.
Cada pregunta vale 2.5 puntos si está completa y sin errores.
Tiempo disponible: hrs.

1. La desigualdad o lema de Gronwall nos permite establecer el siguiente teorema:
   Dada la función $f(x,t)$ que satisface la condición de Lipschitz con constante L, para $x \in D$ y $|t - t_o| < \delta$.
   Sean $x(t)$ y $y(t)$ soluciones del problema de valores iniciales
   $$\dot{x} = f(x,t) \text{ con } x(t_0) = x_0$$
   Para el cual $|t - t_o| < \delta$ tal que $x(t_0) = x_0$ y $y(t_0) = y_0$ donde x_0 , $y_0 \in D$.
   Entonces
   $$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \exp\left(L|t - t_o|\right).$$
   Enuncie el lema de Gronwall y justifique la unicidad de la solución.

2. Se tiene el sistema en coordenadas cartesianas:
   $$\dot{x} = y + x(x^2 + y^2)\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
   $$\dot{y} = -x + y(x^2 + y^2)\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
   que en coordenadas polares está dado por:
   $$\dot{r} = r^3 sin\left(\frac{\pi}{r}\right)$$
   $$\dot{\theta} = -1$$
   ¿Por qué es importante escribirlo en coordenadas polares?
   Esboce el plano fase y explique el punto de equilibrio en el origen y sus trayectorias brevemente.

3. Una ecuación de la forma
   $$\ddot{y} + q(t)y = 0$$
   con $q(t)$ una función periódica en $\mathbb{R}$, con periodo positivo T, se le conoce como ecuación de Hill.
   Escrita como sistema se obtiene el sistema de Floquet:
   $$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix} x$$
   Muestre o explique por qué los multiplicadores de Floquet satisfacen:
   $$\mu_1\mu_2 = 1$$

4. Bifurcación silla-nodo
   Explique, con el mayor detalle posible, la bifurcación silla-nodo que se presenta en
   $$\dot{x} = \mu - x^2$$
   y haga un dibujo para ilustrar su respuesta. Explique además la estabilidad de las ramas de bifurcación.

5. Cadena alimenticia.
   Como un ejemplo de un sistema en tres dimensiones, se tiene el de la Cadena alimenticia:
   $$\dot{x} = x(1 - x) - xy$$
   $$\dot{y} = y(1 - y) - xy - yz$$
   $$\dot{z} = z(1 - z) + yz$$
   donde $x(t)$es la población de abetos,
   $y(t)$ es la población de alces y
   $z(t)$ es la población de lobos.

   Este es un modelo de interacción de las tres poblaciones al tiempo t.
   El sistema tiene cinco puntos de equilibrio. ¿Cuál de ellos es el de coexistencia de las tres poblaciones?
   Si los lobos enferman ¿es posible modificar el sistema para considerar la enfermedad en el modelo? Explique.